- **Betrag:** $|a+b| \le |a| + |b|$; $\quad ||a| - |b|| \le |a-b|$. **Bernoulli'sche Ungleichung:** $(1+a)^n \ge 1 + n \cdot a$
- **Trennungseigenschaft des** $\mathbb{R}$: zu $A, B \subset \mathbb{R}$ mit $(a \in A, b \in B \Rightarrow a \le b)$ existiert ein $s \in \mathbb{R}$ mit: $\forall a \in A \forall b \in B$ gilt $a \le s \le b$ (s trennt A, B).
- **Intervallschachtelung:** Eine Intervallschachtelung ist eine Folge von (abgeschlossenen) Intervallen $I_n := [a_n; b_n] := \{x \in \mathbb{R} \mid a_n < x < b_n\}$ mit den beiden Eigenschaften: **a)** $I_{n+1} \subset I_n, \quad n \in \mathbb{N}$ **b)** Zu jedem beliebig kleinem $\epsilon > 0$ gibt es ein Intervall In mit der Länge $|b_n - a_n| < \epsilon$. Zu jeder Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$ gibt es ein $a \in \mathbb{R}$, welches allen ihren Intervallen angehört.
- *Doppelsummen:* $\sum\limits_{j=1}^{m} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_{jk} \right) = \sum\limits_{j=1}^{m} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{jk} = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sum\limits_{j=1}^{m} a_{jk} \right)$ *Summenprodukt:* $\left(\sum\limits_{j=1}^{m} a_j \right) \left(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k \right) = \sum\limits_{j=1}^{m} \sum\limits_{k=1}^{n} a_j b_k$.
- **Binomialkoeffizient:** $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$; $\quad \binom{n}{0} := 1 =: \binom{n}{n}$; $\quad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$
- **bin. Lehrsatz:** $(a+b)^n = \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^{k-1}$ $\qquad \frac{a^n - b^n}{a-b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}$
- **Konvergenz:** $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$: $\forall \epsilon > 0 \; \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \; \forall n \ge n_\epsilon : \quad |a_n - a| < \epsilon \quad (|a_n - a| \to 0 \;\; (n \to \infty))$
- Cauchy-Folge: $\forall \epsilon > 0 \; \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \epsilon \quad \forall n, m \ge n_\epsilon$
  - $\to$ jede konv. Folge ist C-Folge, jede C-Folge ist beschränkt.
  - $\to$ fast alle $a_n \ge 0 \;\Rightarrow\; a \ge 0$
  - $\to$ $\lim a_n = a \;\Rightarrow\; \lim \mathrm{Re} a_n = \mathrm{Re} a$; $\lim \mathrm{Im} a_n = \mathrm{Im} a$; $\quad \lim |a_n| = |a|$
- **Häufungspunkt (HP):** $\forall \epsilon > 0 \; \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \; \forall n \ge n_\epsilon : \quad |a_n - a| < \epsilon$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1 \;\; \forall c > 0$; $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$; $\quad \lim\limits_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = e$;
- kleinste obere Schranke: $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n := \min\{K \in \mathbb{R} \mid a_n \le K \;\; \forall n \in \mathbb{N}\}$ größte untere Schr.: $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n := \max\{K \in \mathbb{R} \mid a_n \ge K \;\; \forall n \in \mathbb{N}\}$
- **Bolzano-Weierstraß:** a) Jede beschr. Folge besitzt HP. b) jede beschr. Folge in $\mathbb{R}$ besitzt größten und kleinsten HP. Sie werden mit $\lim\sup$ und $\lim\inf$ bezeichnet.
- **Abschluss:** Gehören alle HP von $M \subset \mathbb{K}$ zu M, so heißt M abgeschlossen. $\overline{M} = \left\{ x \in \mathbb{K} \mid \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, \;\; a_n \in M : \;\; x = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \right\}$
- Ist $M \subset \mathbb{K}$ abgeschlossen und hat jede Folge in M einen HP, so heißt M **kompakt**.
- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und (a_n) hat genau einen HP $a \;\Rightarrow\; (a_n) \to a \; (n \to \infty)$.
- **Monotonie:** $a_{n+1} \ge a_n \;\Rightarrow$ mon. steigend.
- jede beschränkte monotone Folge in $\mathbb{R}$ hat Grenzwert.
- **Cauchy-Konvergenz:** $\forall \epsilon > 0 \; \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \; \forall n > m > n_\epsilon : \quad |s_n - s_m| = \left| \sum\limits_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \epsilon$.
- Eine Reihe $\sum a_k$ kann nur konv. sein, wenn Partialsummen beschr. und $|a_k| \to 0 \; (k \to \infty)$
- $\sum a_n$ und $\sum b_n$ konvergent $\Rightarrow \sum(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum a_n + \beta \sum b_n$ existiert und ist konvergent.
- $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n} \to \infty$ (harmon. Reihe); $\quad \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \;\; \forall |x| < 1$ (geomtr. Reihe); $\quad \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$; $\quad \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$ (Leibnitz'sche Reihe).
- **Leibnitz-Kriterium:** $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit alternierenden a_k $(a_k \cdot a_{k+1} \le 0)$ ist konvergent, wenn: $|a_n| \ge |a_{n+1}| \to 0 \;\; (n \to \infty)$.
- **Dirichelet-Kriterium:** $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ habe beschr. Partialsummen und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei mon. fallende Nullfolge $\Rightarrow \; \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ konvergent.
- $\sum a_k$ heißt absolut konvergent, wenn $\sum |a_k|$ konvergiert.
- **Vergleichs-Kriterium:** $s_\infty = \sum a_k$; $s'_\infty = \sum a'_k$
  $\exists k_0 \in \mathbb{N} \; \forall k \ge k_0$ mit Konstante $\kappa > 0$ gilt: $|a_k| \le \kappa a'_k$, so ist s'_∞ Majorante zu s_∞. Aus (abs.) Konv. von s'_∞ folgt (abs.) konv. von s_∞; aus Div. von s_∞ folgt Div. von s'_∞ (gleiches folgt aus: $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \le \frac{a'_{k+1}}{a'_k}$).
- **Wurzelkriterium:** $\sqrt[k]{|a_k|} \le q < 1 \;\Rightarrow\; \sum a_k$ abs. konv. **Quotientenkrit.:** $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \le q < 1 \;\Rightarrow\; \sum a_k$ abs. konv. ($> 1 \;\Rightarrow$ Divergenz) jeweils $\forall n, k \ge n_0, k_0$.
- **Potenzreihe:** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ abs. konv. für $|x - x_0| < R := \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$; für $|x - x_0| > R$ foglt Divergenz.
- **Umordnungssatz:** Für absolut konv. Reihen ist auch jede Umordnung abs. konvergent gegen den selben Limes.
- **Cauchy-Produkt:** $s^{(1)} = \sum a_k$, $s^{(2)} = \sum b_k$ abs. konv. $\;\Rightarrow\; \sum c_n = s^{(1)} \cdot s^{(2)}$ ist abs. konv. mit $c_n = a_1 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_1$.
- **Exponentialreihe:** $\exp(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$; $\quad \exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$;
- **monotone Fkt.:** $x_1 \le x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \le f(x_2)$ für strikt mon. Fkt. existiert strikt mon. Umkehrfkt.
- f hat Limes in x_0, wenn $x_n \to x_0 \; (n \to \infty) \;\Rightarrow\; f(x_n) \to a \; (n \to \infty)$ für alle Folgen $x_n \to x_0$ mit $x_n \in D$
- f heißt **stetig** in $x_0 \in D$, wenn $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D : \;\; x_n \to x_0 \;\Rightarrow\; f(x_n) \to f(x_0)$ oder gdw.: $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta_\epsilon > 0 \; \forall x \in D : \;\; |x - x_0| \le \delta_\epsilon \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$
- f, g stetig in $x_0 \Rightarrow \mathrm{Re} f$, $\mathrm{Im} f$, $|f|$, $f+g$, $f \cdot g$, f/g, $f \circ g$ stetig in x_0; $\quad f$ injektiv und stetig $\Rightarrow f^{-1}$ stetig.
- **Zwischenwertsatz:** Sei $f : [a.b] \to \mathbb{R}$ stetig $\;\Rightarrow\; \forall y \in \mathbb{R}$ mit $f(a) < y < f(b) \;\; \exists c \in [a,b]$ mit $f(c) = y$.
- kleinste obere Schranke: $\sup\limits_{x\in D} f(x) = \min\{\beta \in \mathbb{R} \,|\, f(x) \le \beta \; \forall x \in D\}$
- Satz von Beschränktheit: Eine auf einer beschr. abgeschl. Teilmenge $D \subset \mathbb{K}$ stetige Fkt. $f : D \to \mathbb{K}$ ist dort beschränkt, d.h. $\exists k > 0$ mit $\sup\limits_{x\in D} |f(x)| \le k$.
- **Satz vom Extremum:** Eine auf einer beschr. abgeschl. Teilmenge $D \subset \mathbb{K}$ stetige reell-wertige Fkt. f besitzt dort ein Max. und ein Min.
- **Gleichm. Stetigkeit:** Eine auf einer beschr. abgeschl. Teilmenge $D \subset \mathbb{K}$ stetige Fkt. ist dort gleichm. stetig, d.h. $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta_\epsilon > 0 \; \forall x, x' \in D :$ $|x - x'| < \delta_\epsilon \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x')| < \epsilon$.
- $\ln(y \cdot y') = \ln(y) + \ln(y')$; $\quad \ln(y^r) = r \cdot \ln(y)$; $\quad a^\alpha := e^{\alpha \cdot \ln(a)} > 0, \;\; a \in \mathbb{R}_+, \alpha \in \mathbb{R}$

- $\frac{e^x}{x^n} \to \infty \ (x \to \infty)$; $\quad \frac{\ln(x)}{\sqrt[n]{x}} \to 0 \ (x \to \infty)$;
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; $\sin 0 = 0$; $\sin\frac{\pi}{2} = 1$; $\sin\pi = 0$; $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$; $\sin 2\pi = 0$; $\cos 0 = 1$; $\cos\frac{\pi}{2} = 0$; $\cos\pi = -1$; $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$; $\cos 2\pi = 1$; $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$; $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$; $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$; $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$; $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$; $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$; $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$; $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x} = 0$; $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$
- $e^{ix} = \cos x + i\sin x$; $\mathrm{Re}e^{ix} = \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$; $\mathrm{Im}e^{ix} = \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$; $\mathrm{Re}z = \frac{z+\bar{z}}{2}$; $\mathrm{Im}z = \frac{z-\bar{z}}{2i}$;
- **Definition von π:** $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}$ ist eindeutig bestimmte Nullstelle von cos in $[0;2]$.
- Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **punktweise konvergent** gegen $f \Leftrightarrow \forall x \in D: \ f_n(x) \to f(x) \ (n \to \infty)$
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **gleichmäßige konverget** gegen $f \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_\epsilon : \ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \ \ \forall x \in D$.
  konvergiert Folge stetiger Fkt'nen gleichmäßig, so ist Grenzfkt. stetig.
- f diff'bar $\Leftrightarrow \lim\limits_{x_0+h\in D, h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existiert $\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} : f(x) = f(x_0) + c\cdot(x - x_0) + \omega(x), x \in \mathbf{D}$ mit $\lim\limits_{x\in D, x\to x_0}\frac{\omega(x)}{x-x_0} = 0$. $(\Rightarrow c = f'(x_0))$
- $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}, y = f(x)$; $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$; $\cot'(x) = \frac{-1}{\sin^2(x)}$; $\ln'(x) = \frac{1}{x}$; $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$; $\frac{d}{dx}a^x = a^x\cdot\ln(a)$;
- **Satz vom Extremum:** f hat auf $I = (a,b)$ lok. Extremum $x_0 \in I$ $(f(x_0) \geq f(x) \ \ \forall x \in U_\delta(x_0)) \Rightarrow f'(x_0) = 0$. $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ ist striktes lok. Maximum.
- **Satz von Rolle:** f auf $[a,b]$ stetig, auf (a,b) diff'bar und $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in (a,b) : f'(c) = 0$.
- **1. Mittelwertsatz:** f auf $[a,b]$ stetig, auf (a,b) diff'bar $\Rightarrow \exists c \in (a,b) : f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

$\Rightarrow$ $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ monoton steigend; $\quad |f'(x)| \leq K, x \in (a,b) \Rightarrow |f(x) - f(x')| \leq K\cdot|x - x'|$; $\ x, x' \in [a,b]$ (L-stetig !)

$\Rightarrow$ $f''(x) \geq 0, x \in I \Rightarrow f$ konvex auf I, d.h. $\forall x, y \in I \forall\lambda \in (0,1) : f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$

- **2. Mittelwertsatz:** f, g auf $[a,b]$ stetig, auf (a,b) diff'bar und $g'(x) \neq 0$ mit $x \in (a,b) \Rightarrow \exists c \in (a,b) : \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.
- **Taylor-Entwicklung:** Ist f $(n+1)$-mal stetig diff'bar und $t_n(x_0, x) = \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ um $x_0 \in (a,b) \Rightarrow \forall x \in (a,b)\exists\xi$ zwischen x und x_0, mit: $f(x) = t_n(x_0, x) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}}_{=:R_{n+1}(x_0,x)}$. f konvergiert und $f(x) = t_\infty(x_0, x) \Rightarrow f$ (reell) analytisch. $\sup\limits_{x\in(a,b)}|f^{(n)}(x)| \leq M < \infty, n \in \mathbb{N} \Rightarrow f$ analytisch, d.h. Taylor konvergiert für $x, x_0 \in (a,b)$. **immer z.z.:** $t_n(x_0, x)$ konvergiert gegen $f(x)$ und $R_{n+1}(x_0, y) \to 0 \ (n \to \infty)$
- **Newton-Verfahren:** $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$; $\quad |x_n - x^*| \leq A\cdot|x_n - x^*|^2 \Rightarrow$ quadratische Konvergenz.
- $C[a,b] := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{stetig}\}$ ist ein normierter Vektorraum mit der sog. Maximumsnorm: $\|f\|_\infty := \max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$
  (Normeigenschaften: $\|f\|_\infty = 0 \Rightarrow f(x) = 0$; $\|\alpha f\|_\infty = |\alpha|\,\|f\|_\infty, \alpha \in \mathbb{R}$; $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$)
- Für eine Fkt.-Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf beschränktem, abgeschl. Intervall $D = [a,b]$ ist die gleichmäßige Konvergenz gegen $f : [a,b] \to \mathbb{R} \Leftrightarrow \|f_n - f\|_\infty \to 0 \ (n \to 0)$. C-Folge und Vollständigkeit sind analog zu $\mathbb{R}$ definiert.
- **Arzelà-Ascoli:** Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Fkt.-Folge mit $f_n \subset C[a,b]$ und gleichmäßig beschränkten $(\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\|f_n\|_\infty < \infty)$ und gleichgradig stetigen $(\forall\epsilon > 0\ \exists\delta_\epsilon > 0\ \forall n \in \mathbb{N} : \max\limits_{x,x'\in I; |x-x'|\leq\delta_\epsilon}|f_n(x) - f_n(x')| < \epsilon)$ Gliedern gegeben. Dann existiert eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\|f_{n_k} - f\|_\infty \to 0 \ (k \to \infty)$ mit $f \in C[a,b]$.
- Eine (beschränkte) monotone Funktion $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ ist **Riemann-integrierbar**.
- **Monotonie des R-Integrals:** Sei: $g(x) \geq f(x), \ x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx$
- $|f|$ist R-integrierbar und es gilt: $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$; $f_+ := \max(f, 0)$, $f_- := \min(f, 0)$, $(f\cdot g)$ sind R-integrierbar.
- **Fundamentalsatz: a)** für stetige Funktionen ist das bestimmte R-Integral: $F(x) = \int_a^b f(y)dy, \ x \in [a,b]$ eine Stammfkt. **b)** ist F Stammfkt. einer stetigen Fkt f, dann gilt: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\mid_a^b := F(b) - F(a)$
- $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$; $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$; $\int\frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$; $\int\sin(x)dx = -\cos(x) + C$; $\int\cos(x)dx = \sin(x) + C$; $\int\frac{dx}{\cos^2(x)} = \tan(x) + C$; $\int\frac{dx}{\sin^2(x)} = -\cot(x) + C$; $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$; $\int\frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + C$; $\int\frac{1}{x+a}dx = \ln(|x+a|) + C$ $\int\frac{a}{(x+a)^n}dx = \frac{1}{(1-n)(x+a)^{n-1}} + C$ $\int\frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$ $\int\frac{x}{(x^2+a)^n}dx = \frac{1}{2(1-n)(x^2+1)^{n-1}}$
- $\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int\limits_a^b u'(x)v(x)dx$; $\qquad \int\limits_a^b f(\varphi(y))\,\varphi'(y)\,dy = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$
- Sei $f : [n_0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige, positive, monoton fallende Fkt. Dann gilt: $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} f(k) < \infty \Leftrightarrow \int\limits_{n_0}^{\infty} f(x)dx < \infty$

Die wirklich wichtigen Dinge, wenn's gar nicht mehr weitergeht:

L'Hospital — zur bin. Formel erweitern — $|x_n - x| \to 0$ — Null addieren — Dreiecksungleichung — Phönix — triviale 1 einfügen — 42

DON'T PANIC

— it is from earth, so it has to be mostly harmless —

in any other case: Try to tell the professor that you own a towel and therefor have to pass the test, or:

Take the juice from one bottle of Ol' Janx Spirit. Pour into it one measure of water from the seas of Santraginus V. Allow three cubes of Arcturan Mega-gin to melt into the mixture. Allow four Litres of Fallian marsh gas to bubble through it. Over the back of a silver spoon float a measure of Qualactin Zones. Drop in the tooth of the Algolian Suntiger. Sprinkle Zamphuor and add an olive ... drink ... but ... very carfully ...