

Formelsammlung

Jan Krieger

1. März 2005

'The time has come,' the Walrus said,
'To talk of many things:
Of shoes – and ships – and sealingwax –
Of cabbages – and kings –
And why the sea is boiling hot –
And whether pigs have wings.'

– Tweedledee in *Through the Looking-Glass* by Lewis Carrol

INHALTSVERZEICHNIS

1	Kurzformelsammlung	4
1.1	Mechanik	5
1.2	Wellen/Optik	5
1.3	Relativitätstheorie	5
1.4	Thermodynamik	6
1.5	Elektrodynamik	6
1.6	Quantenphysik	6
1.7	Konstanten	6
2	Mechanik	7
2.1	Formelsammlung	7
2.1.1	allg. kinematische Formeln	7
2.1.2	Relativitätstheorie	8
2.2	Klassische Mechanik	9
2.3	Spezielle Relativitätstheorie in ict-Metrike	12
2.4	Kontra-/Kovariante Formulierung der speziellen Relativitätstheorie (SRT)	13
3	Elektrodynamik	17
3.0.1	Einheitensysteme	17
3.0.2	Formelsammlung	17
3.0.3	Laplace-Gleichung	17
4	Thermodynamik	20
5	Quantenmechanik	21
5.1	Axiome der Quantenmechanik	21
5.2	Mathematischer Rahmen	21
5.3	wichtige Sätze der Quantenmechanik	26
5.4	Heisenberg-Bild/Schrödinger-Bild	27
5.5	Wichtige Operatoren	28
5.6	Störungsrechnung und Näherungsverfahren	29
5.6.1	Zeitunabhängige Störung nichtentarteter Niveaus	29
5.6.2	Ritz'sches Variationsverfahren	29
5.7	Einfache Beispiele	30

5.7.1	Freies Teilchen	30
5.7.2	Harmonischer Oszillator	31
5.7.3	Delta-Potential	33
5.7.4	Paritätsoperator	34
5.7.5	Anwendung des Ritz'schen Variationsverfahrens	34
5.7.6	Diagonalisierung einer hermite'schen 2×2 -Matrix	36
5.8	Drehimpuls in der Quantenmechanik	37
5.9	Das Wasserstoffatom	39
5.10	Zwei-Zustandssysteme	41
5.10.1	Grundlegende Beschreibung	41
6	Teilchenphysik	43
6.1	Streuprozesse	43
6.1.1	Einleitung	43
6.1.2	Wirkungsquerschnitt	44
6.2	Übersichtstabellen	44
6.2.1	Quarks	44
6.2.2	Standardmodell	45
6.2.3	Barionen	45
6.2.4	Mesonen	46
7	Statistische Physik	47
7.1	Stochastische Prozesse	47
7.1.1	Allgemeine Definitionen	47
7.1.2	Stochastische Prozesse	48

KAPITEL 1

Kurzformelsammlung

Die folgenden Seiten fassen wichtige Formeln und Größen kurz zusammen.

1.1 Mechanik

Bahngeschw.:	$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r}$
Geradl. Bewegung:	$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$ $\vec{a} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}}{2} t^2$ $2ax = v^2 - v_0^2$
Impuls, Kraft:	$\vec{p} = m\vec{v} \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$
Bahndrehimpuls:	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m \cdot \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ $\vec{L} = \vec{I} \cdot \vec{\omega}$
Drehmoment:	$\vec{M} = \dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{r} \times \vec{F}$ $\vec{M} = \vec{I} \cdot \dot{\vec{\omega}}$
Arbeit:	$W = \vec{F} \cdot \vec{s}; \quad P = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$
Leistung:	$P = \frac{W}{t} = \vec{F} \cdot \vec{v}; \quad P = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$
Wirkungsgrad:	$\eta = \frac{P_{\text{nutz}}}{P_{\text{auf}}}$
kin. Energie:	$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$
Druck:	$p = \frac{F_{\text{normal}}}{A}$
Staudruck:	$p_{\text{dyn}} = \frac{E_{\text{kin}}}{V} = \frac{1}{2}\rho v^2$
hydrostat. Druck:	$p_h = \rho g \cdot h$
Bernoulli:	$p_{\text{stat}} + p_{\text{dyn}} + p_{\text{ges}} = \text{const}$
Feder:	$F_F(x) = -D \cdot x$ $V_F(x) = \frac{D}{2} \cdot x^2$
Reibung:	$F_R = \mu \cdot F_{\text{normal}}$
Auftrieb:	$F_A = \rho \cdot g \cdot V_{\text{Körper}}$
Gravitation:	$F_G(x) = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2} \approx m \cdot g$ $V_G(x) = -m \cdot g \cdot x$
Zentripetalkraft:	$F_z(r) = m \cdot \omega^2 \cdot r = m \cdot \frac{v^2}{r}$ $\vec{F}_r = m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$
Corioliskraft:	$\vec{F}_c = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}$
kons. Kräfte:	$\text{rot } \vec{F} = 0$

1.2 Wellen/Optik

Frequenz:	$\nu = \frac{N_{\text{Umläufe}}}{t} = \frac{1}{T}$
Kreisfrequenz:	$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$
Wellenzahl:	$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{c}{\nu}$
Ausbreitung:	$v_{\text{Phase}} = c = \lambda \cdot \nu = \frac{\omega}{k}$
Wellengleichung:	$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$
period. Schwing.:	$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$
Brechung:	$\frac{\sin \alpha_{\text{außen}}}{\sin \alpha_{\text{innen}}} = \frac{c_{\text{außen}}}{c_{\text{innen}}} = n$
Linsengleichung:	$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$
Doppler-Effekt:	$v_{\text{Send.}} = 0: f' = f \cdot \left(1 \pm \frac{v_{\text{Empf.}}}{c}\right)$ $v_{\text{Empf.}} = 0: f' = f \cdot \frac{1}{\mp \frac{v_{\text{Send.}}}{c}}$

1.3 Relativitätstheorie

Invarianz:	$c^2 t^2 - \vec{x}^2 = \text{const}$
Lorenz-Trafo:	$\beta = \frac{v}{c} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ $ct = \gamma(ct' + \beta x)$ $x = \gamma(x' + \beta ct')$ $T_{L,ict} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}$
Geschw. Add.:	$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}}$ $u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}$
Zeitdilatation:	$\Delta t = \gamma \cdot \Delta t'$
Längenkontr.:	$l = \frac{1}{\gamma} l'$
Massenzunahme:	$m(v) = \gamma \cdot m_0$
Impuls:	$\vec{p} = \gamma m_0 \vec{\beta} c$ $\vec{\beta} = \frac{\vec{p} \cdot c}{E}$
Energie:	$E = mc^2 = \gamma m_0 c^2$
Energie/Impuls:	$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$

1.4 Thermodynamik

kin. Gastheorie:	$p = \frac{1}{3}\rho \langle v^2 \rangle$ $E_{\text{kin}} = \frac{3}{2}kT$ $\langle v^2 \rangle = \frac{3RT}{M_m}$
ideale Gase:	$\frac{pV}{T} = \text{const}$ $pV = nRT = NkT$
Wärmekapazität:	$C = \frac{\Delta Q}{\delta T}$
spez. Wärmekapazität:	$c = \frac{\Delta Q}{m \cdot \delta T} = \frac{C}{m}$
Erwärmen:	$\Delta Q = c \cdot m \cdot \Delta T$
1. Hauptsatz:	$\Delta U = \Delta Q + \Delta W$
2. Hauptsatz:	$\eta_{\text{max}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$

1.5 Elektrodynamik

:

1.6 Quantenphysik

Wien-Gesetz:	$\lambda_{\text{max}} \cdot T = 2,8978 \cdot 10^{-3} \text{ m K}$
Planck-Strahlung:	$w_\nu(\nu) d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{d\nu}{\exp(\frac{h\nu}{kT}) - 1}$
Stefan-Boltzmann:	$\frac{dW}{dt} = \sigma \cdot T^4$
Unschärferelation:	$\Delta p_x \cdot \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$ $\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$
Materiewellen:	$v = \frac{mc^2}{h}$ $\lambda_{\text{DB}} = \frac{h}{mv}$ $\lambda_{\text{DB}} = \frac{h}{mv} = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m \cdot E_{\text{kin}}}}$ $v_{\text{Phase}} = \frac{1}{2} v_{\text{Teilchen}}$ $v_{\text{Gruppe}} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar k}{m} = \frac{p}{m} = v_{\text{Teilchen}}$
Photon:	$\vec{p} = \hbar \vec{k} = \frac{h\nu}{c}$ $E = h\nu = \hbar\omega = \frac{hc}{\lambda}$, $\lambda = \frac{c}{\nu}$ $m = \frac{h\nu}{c^2}$

1.7 Konstanten

Lichtgeschw.:	c	$2.99792458 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
Gravitation	G	$6.672591 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$
Planck:	h	$6.6260755 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$
	\hbar	$1.0545726 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$ $197.3 \frac{\text{MeV}}{c \cdot \text{fm}}$
	$\hbar c$	$0.197 \text{ GeV fm} =$ $197 \text{ MeV fm} = 197 \text{ eV nm}$
Gaskonstante:	R	$8.314510 \frac{\text{J}}{\text{K mol}}$
Boltzmann:	$k = \frac{R}{N_A}$	$1.380658 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$
Avogadro:	N_A	$6.0221367 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Molvolumen:	V_M	$22.41410 \frac{1}{\text{mol}}$
AME:	$\frac{1}{12} m(^{12}\text{C})$	$1.6605402 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Stefan-Boltzm.:	σ	$5.6705 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$
Elektron:	e	$1,60217733 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
	m_e	$9.1093897 \cdot 10^{-31} \text{ kg} =$ $510.998918 \text{ keV}/c^2$
Proton:	m_p	$1.6726231 \cdot 10^{-27} \text{ kg} =$ $938.272029 \text{ MeV}/c^2$
Neutron:	m_n	$1.6749286 \cdot 10^{-27} \text{ kg} =$ $939.565360 \text{ MeV}/c^2$
Nukleon:	r_{Nukleon}	$1.2 \cdot 10^{-15} \text{ m} = 1.2 \text{ fm}$
B.-Magneton:	$\alpha_0 = \frac{e_0 h^2}{\pi \mu e^2}$	$5,2917 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ $\approx 0.5 \text{ \AA}$
Dielek.:	$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$	$8,854187817 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A s}}{\text{V m}}$
Permeabil.:	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{V s}}{\text{A m}} =$ $1.25663706 \cdot 10^{-6} \frac{\text{V s}}{\text{A m}}$

2.1 Formelsammlung

2.1.1 allg. kinematische Formeln

Bahngeschwindigkeit: $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r} \rightarrow |\vec{v}| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin \alpha$

Bahndrehimpuls: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m \cdot \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$

Drehmoment: $\vec{M} = \dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{r} \times \vec{F} = m \cdot \vec{r} \times \ddot{\vec{r}}$

Arbeit, Leistung: $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}; \quad P = \frac{W}{t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

ausgedr. in Winkeln: $\vec{L} = \underline{I} \cdot \vec{\omega}; \quad \vec{M} = \underline{I} \cdot \dot{\vec{\omega}} = \dot{\vec{L}}$
 $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \vec{\omega}^t \underline{I} \vec{\omega};$
 $dW = \vec{M} \cdot d\varphi \cdot \vec{e}_{\omega}; \quad P = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$

Federkraft: $F_F(x) = -D \cdot x$

Gravitationskraft: $F_G(x) = m \cdot g$ bzw. $F_G(r) = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}$

Federpotenzial: $V_F(x) = \frac{D}{2} \cdot x^2$

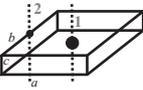
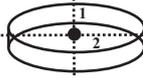
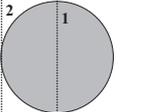
Gravitationspotenzial: $V_G(x) = -m \cdot g \cdot x$

Zetripetalkraft: $F_z(r) = m \cdot \omega^2 \cdot r = m \cdot \frac{v^2}{r}; \quad \vec{F}_r = m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

Corioliskraft: $\vec{F}_c = -2m \vec{\omega} \times \vec{v}$

kons. Kräfte: $\text{rot } \vec{F} = 0$

Drehmomente

Körper	Drehachsen	Moment	Moment
dünner Stab (Länge l)		$\frac{1}{12} ml^2$	$\frac{1}{3} ml^2$
Punktmasse (Abstand r_{\perp})		mr_{\perp}^2	
Platte ($a, b, c, c < a, b$)		$\frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$	$\frac{1}{12} m(4a^2 + b^2)$
Quader (a, b, c)	wie Platte	$\frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$	$\frac{1}{12} m(4a^2 + b^2)$
Kreisscheibe (Radius r)		$\frac{1}{2} mr^2$	$\frac{1}{4} mr^2$
Kreisring (Radius r)	wie Scheibe	mr^2	$\frac{1}{2} mr^2$
Kreiskegel (r, h)		$\frac{3}{10} mr^2$	$\frac{3}{80} m(h^2 + 4r^2)$
Zylinder (r, h)	wie Scheibe	$\frac{1}{2} mr^2$	$\frac{1}{12} m(h^2 + 3r^2)$
Vollkugel (Radius r)		$\frac{2}{5} mr^2$	$\frac{7}{5} mr^2$
Ellipsoid (Halbachsen a, b, c)	Rotation um \vec{c}	$\frac{1}{5} m(a^2 + b^2)$	

2.1.2 Relativitätstheorie

2.2 Klassische Mechanik

- **Zwangsbedingungen:**

- *Holonome Zwangsbedingungen:* $f_i(q_1, \dots, q_{3N}, t) = 0$, $i = 1, \dots, k$ (d.h. Einschränkung auf Flächen im \mathbb{R}^3).
 - * f_i hängen von der Zeit ab \rightarrow *rheonome ZB*
 - * f_i zeitunabhängig \rightarrow *skleronome ZB*
- *Nichtholonome Zwangsbedingungen:* die Bahn lässt sich nicht durch eine derartige Gleichung beschreiben. Die Zwangsbedingung kann z.B. auf einen Raumbereich einschränken $f_i(q_1, \dots, q_{3N}, t) < c$, oder auch von den Geschwindigkeiten abhängen.

- **D'ALEMBERT-Prinzip:**

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \vec{Z}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

mit \vec{Z}_i : Zwangskräfte; $\delta \vec{r}_i$ virtuelle Verrückung

- **LAGRANGE-Formalismus:**

Für die Lagrange-Funktion eines Systems $\mathcal{L} := T - V$ in n Koordinaten $(x_1 \dots x_n)$, mit der kinetischen Energie T und der potentiellen Energie V gilt die Euler-Lagrange-Differentialgleichung:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0$$

- **Spezielle Punkte in Potenzialen $V(x_1, \dots, x_n) = V(\vec{x})$:**

- **stationärer Punkt im Potenzial $V(x)$:** $\frac{dV}{dx}(x_s) = 0$ und $E = V(x_s)$. x_s stabil für $\frac{d^2V}{dx^2}(x_s) > 0$ und instabil für $\frac{d^2V}{dx^2}(x_s) < 0$
- **Umkehrpunkt:** $V(x_u) = E_{ges}$, $\frac{dV}{dx}(x_u) \neq 0$
- **Gleichgewichts-Punkt:** $\dot{x} = \ddot{x} = 0$

- Für eine **Erhaltungsgröße** $f(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$, in den Koordinaten \vec{q} gilt:

$$\frac{d}{dt} f(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = 0$$

Für $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$ ist die Hamilton-Funktion H eine Erhaltungsgröße. Für skleronome Zwangsbedingungen, ruhende Bezugssysteme und konservative Kräfte gilt weiter $H = T + V$.

- **zyklische Koordinaten:** Eine Koordinaten q_j heißt zyklisch, falls:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt} p_j = 0$$

Damit ist der zu q_j konjugierter Impuls p_j erhalten:

$$p_j := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$$

- **NOETHER-Theorem:** Ist \mathcal{L} bis auf ein totales zeitliches Differential invariant unter einer Transformation $q_i \rightarrow q'_i = q'_i(q_1, \dots, q_{3N-k}, t, \alpha)$ (mit $q'_i(\alpha = 0) = q_i$ und in α stetig diff'bar), also:

$$\mathcal{L}'(q', \dot{q}', t, \alpha) = \mathcal{L}(q', \dot{q}', t) + \frac{d}{dt}F(q', t, \alpha)$$

so ist:

$$J = \sum_{i=1}^{3N-k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i(q', t, \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} - \frac{\partial F(q', t, \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0}$$

bzw. für $F \equiv 0$:

$$I(q, \dot{q}, t) = \sum_{i=1}^{3N-k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i(q', t, \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0}$$

eine Erhaltungsgröße.

- **Virialsatz:**

$$\bar{T} = \frac{1}{2} \cdot \overline{\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \cdot \vec{\nabla}_i U} = -\frac{1}{2} \cdot \overline{\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \cdot \vec{F}}$$

mit $\bar{f} = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2t_0} \int_{-t_0}^{t_0} f(t) dt$.

Ist weiter $U(a \cdot q_1, \dots, a \cdot q_N) = a^k U(q_1, \dots, q_N)$, dann ist $\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \cdot \vec{\nabla}_i U = k \cdot U$, also $2\bar{T} = k\bar{U}$

- **Zentralkraft:**

Zweikörperproblem: Das Zweikörperproblem ohne äußere Kräfte kann in ein gleichförmige Schwerpunktsbewegung ($\vec{R} = 0$, mit $\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$) und eine davon abgekoppelte Relativbewegung $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$, mit $\vec{r} := \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ zerlegt werden.

effektives Potenzial: $V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$

- **starrer Körper:**

– *Trägheitstensor:*

$$I_{ij} = \sum_{\alpha=1}^n m_\alpha [x_{\alpha k} x_{\alpha k} \delta_{ij} - x_{\alpha i} x_{\alpha j}]$$

$$\Rightarrow \underline{I} = \sum_{\alpha=1}^n m_\alpha \begin{pmatrix} y_\alpha^2 + z_\alpha^2 & -x_\alpha y_\alpha & -x_\alpha z_\alpha \\ -y_\alpha x_\alpha & x_\alpha^2 + z_\alpha^2 & -y_\alpha z_\alpha \\ -z_\alpha x_\alpha & -z_\alpha y_\alpha & x_\alpha^2 + y_\alpha^2 \end{pmatrix} = \int_V \rho(x, y, z) (\dots) dx dy dz$$

– *Satz von Steiner:* Das Trägheitsmoment J_X bei Rotation um eine Achse parallel zu einer Achse J_S durch Schwerpunkt:

$$J_X = mr_S^2 + J_S$$

– *Schwerpunktsatz:* Der Schwerpunkt bewegt sich so, als ob die resultierende Kraft an ihm angreift und alle Masse in ihm vereinigt ist.

$$m \cdot \ddot{\vec{r}}_S = \sum_{\alpha=1}^n \vec{F}_\alpha^{(a)} =: \vec{F}^{(a)}$$

– Drehimpulssatz:

$$\sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \vec{r}_{I\alpha} \times \ddot{\vec{r}}_{I\alpha} = \sum_{\alpha=1}^n \vec{r}_{I\alpha} \times \vec{F}_{\alpha}^{(a)} \Leftrightarrow \dot{\vec{L}}_{\text{ges}} = \vec{M} = \underline{I}_S \dot{\vec{\omega}}$$

– kinetische Energie: $T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \vec{\omega}^t \cdot \underline{I} \cdot \vec{\omega}$ (evtl. muss man die Rotation noch auf die körperfesten Hauptträgheitsachsen projizieren)

\vec{r}_O Ursprung O körperfestes System, $\vec{r}_{\alpha} = \vec{r}_{OP} = \overline{OP}$ Abstand zum körperfesten Ursprung O: $\vec{v}_{\text{inertial}} = \dot{\vec{r}}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_{OP}$

$$\Rightarrow T = \frac{M}{2} \dot{\vec{r}}_O^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha})^2 + (\dot{\vec{r}}_O \times \vec{\omega}) \cdot \sum_i m_i \vec{r}_i = T_{\text{trans}} + T_{\text{rot}} + T_{\text{koppel}}$$

→ körperfestes System mit Ursprung in Schwerpunkt $\vec{S} = \vec{r}_O \Rightarrow T = T_{\text{trans}} + T_{\text{rot}}$, da $\sum_i m_i \vec{r}_i = 0$

→ körperfestes System mit Ursprung in raumfestem Aufhängepunkt ($\dot{\vec{r}}_O = 0$) $\Rightarrow T = T_{\text{rot}}$

- **Legendre-Trafo I:** beschreibt den Übergang (x, y) in einer Funktion $f(x, y)$ zu $(u := \frac{\partial f}{\partial x}, y)$ in einer neuen Funktion $g(u, y)$:

Es gilt: $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = u dx + v dy$ mit $u := \frac{\partial f}{\partial x}$ und $v := \frac{\partial f}{\partial y}$

Für eine Funktion $g := f - ux$ gilt: $dg = df - u dx - x du = v dy - x du$. Diese ist die gesuchte Funktion $g(u, y)$, mit $dg = \frac{\partial g}{\partial u} du + \frac{\partial g}{\partial y} dy$.

Ein Vergleich der vollst. Differential ergibt: $v = \frac{\partial g}{\partial y}$ und $x = -\frac{\partial g}{\partial u}$

- **Legendre-Trafo II:** für Lagrange → Hamilton gilt $(q, \dot{q}) \rightarrow (q, p)$, also: $\mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) \rightarrow H(\vec{q}, \vec{p}, t)$, dabei nutzt man: kanon. Impuls $p_i = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}_i \Rightarrow \dot{p}_i = \partial \mathcal{L} / \partial q_i$ (aus Euler-Lagrange-Gleichung). $H(p, q, t) = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$;

$$\Rightarrow dH = \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i - p_i dq_i) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

andererseits: $dH = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}; \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}; \quad H(\vec{p}, \vec{q}, t) = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i(\vec{p}, \vec{q}, t) \cdot p_i - \mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}(\vec{q}, \vec{p}, t))$$

- **kanonische Transformationen:** Finde $q_i \rightarrow Q_i(\vec{q}, \vec{p}, t)$ und $p_i \rightarrow P_i(\vec{q}, \vec{p}, t)$ so, dass es eine neue Hamiltonfunktion $K(P, Q, t)$ gibt, die die Hamilton'schen Gleichungen erfüllt $\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}$; $\dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}$

Eine Transformation heißt kanonisch, gdw. $\left[\sum_i p_i \dot{q}_i - H \right] - \left[\sum_i P_i \dot{Q}_i - K \right] = \frac{d}{dt} F(q, p, Q, P, t)$.

Da P und Q Fkt. von p und q sind, gibt es nur 2n+1 unabh. Variable. Also lässt sich F folgendermaßen darstellen und es gilt neben $K = H + \frac{\partial F_i}{\partial t}$:

$$F_1(q, Q, t): p = \frac{\partial F}{\partial q}; P = -\frac{\partial F}{\partial Q} \quad F_2(q, P, t): p = \frac{\partial F}{\partial q}; Q = -\frac{\partial F}{\partial P}$$

$$F_3(p, Q, t): q = \frac{\partial F}{\partial p}; P = -\frac{\partial F}{\partial Q} \quad F_4(p, P, t): q = \frac{\partial F}{\partial p}; Q = -\frac{\partial F}{\partial P}$$

ist $\frac{\partial F_i}{\partial t}$, so ist $H = K$ und es gilt die einfachere Bedingung für kanonität: $\sum_{i=1}^n (p_i \dot{q}_i - P_i \dot{Q}_i) = \frac{dF}{dt}$

- **Poisson-Klammern:**

- $[f, g]_{q,p} := \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$
- $\frac{df}{dt}$, in einem System, das durch die Hamilton-Funktion H beschrieben wird hat dann die Form: $\frac{df}{dt} = [f, H] + \frac{\partial f}{\partial t}$
- $\Rightarrow f$ mit $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, ist Erhaltungsgröße, gdw. $[f, H] = 0$
- kanonische Gleichungen: $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = [q_i, H] \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = [p_i, H]$
- Rechenregeln:
 - $[c_1 f + c_2 g, h] = c_1 [f, h] + c_2 [g, h] \quad [f, g] = -[g, f] \quad [\text{const}, f] = 0$
 - $[fg, h] = f [g, h] + [f, h] g \quad [f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0$
- kanonische Invarianten: Eine Transformation $q_i \rightarrow Q_i; \quad p_i \rightarrow P_i$ ist genau dann kanonisch, wenn: $[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0, \quad [q_i, p_j] = \delta_{ij}$

- **Liouville-Satz (=Satz von der Erhaltung des Phasenraums):** Die Bewegung eines Systems im Phasenraum Γ wird durch die Trajektorie $\vec{x}_\Gamma(t) = (\vec{q}(t), \vec{p}(t))$ beschrieben. Mit $w_\Gamma(t) = \dot{\vec{x}}_\Gamma(t) = \left(-\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_k} \right)$ gilt dann $\text{div } \vec{w}_\Gamma = 0$.
Ein Volumen $V_\Gamma(t_0)$ mit der geschlossenen Begrenzungsfläche $S_\Gamma(t_0)$ strömt mit dem Geschw.feld $\vec{w}_\Gamma(t)$ durch den Phasenraum. Es gilt:

$$\frac{d}{dt} V_\Gamma(t) = \int_{V_\Gamma(t)} \text{div } \vec{w}_\Gamma \cdot dq_1 \dots dq_n \cdot dp_1 \dots dp_n = 0$$

• **Stabilität & Chaos:**

- *Fixpunkte:* $\dot{x}_{\text{fix}} = 0$ bzw. $x_{\text{fix}} = f(x_{\text{fix}})$.
für Systeme $x_{n+1} = f(x_n): \left| \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=x_{\text{fix}}} \right| < 1 \Rightarrow x_{\text{fix}}$ stabil, da f dort Kontrak.; $\dots > 1 \Rightarrow x_{\text{fix}}$ instabil
für Systeme $\dot{x} = f(x, \dot{x})$: betrachte kl. Störung $\epsilon(t) \ll 1$ des FP $x_f: x_f \mapsto x_f + \epsilon$ sei Lösung. Setze in DGI ein und betrachte lin. Näherung der entstehenden DGI in $\epsilon: \epsilon \propto e^{\alpha t}: \alpha > 0$ instabil, $\alpha < 0$ stabil
- *Stabilitätsmatrix eines DGLSys* $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, t): \underline{A} := \vec{\nabla} \vec{f}(\vec{x}, t) = \begin{pmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 & \partial f_1 / \partial x_2 & \dots \\ \partial f_2 / \partial x_1 & \dots & \dots \end{pmatrix}$
 $\vec{x}_f \mapsto \vec{x}_f + \vec{\delta}(t)$ in DGI $\Rightarrow \dot{\vec{\delta}} = f(\vec{x}_f + \vec{\delta}, t) \stackrel{\text{Taylor}}{\approx} \vec{\nabla} \vec{f} \cdot \vec{\delta} = \underline{A} \cdot \vec{\delta} = \lambda \vec{\delta}, \lambda$ EW von $\underline{A} \Rightarrow$ exp-Ansatz $\Rightarrow \vec{x}_f$ stabil, falls $\forall \lambda: \text{Re}(\lambda) < 0$, da dann $\vec{\delta} \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$

2.3 Spezielle Relativitätstheorie in ict-Metrike

Wir betrachten zwei Inertialsysteme K und K' , die sich zueinander mit der konstanten Geschwindigkeit v in x_1 -Richtung bewegen. Die Raumzeitkoordinaten eines Ereignisses in K und K' lauten (ct, x, y, z) bzw. (ct', x', y', z') . Aus der Invarianz raum-zeitlicher Abstände erhält man die Gleichung:

$$(ct')^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) = (ct)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$$

Die spezielle Lorentz-Transformation beschreibt den Wechsel von K nach K' . Sie lautet:

$ct' = \gamma(ct - \beta x)$	$ct = \gamma(ct' + \beta x)$	$\beta \equiv \beta(v) = \frac{v}{c}$ $\gamma \equiv \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$
$x' = \gamma(x - \beta ct)$	$x = \gamma(x' + \beta ct')$	
$y' = y$	$y = y'$	
$z' = z$	$z = z'$	

Setzt man $\beta = \tanh \varphi$ und nennt φ den *Boost-Parameter* oder die *Rapidity*, so erhält man folgende alternative Parametrisierung:

$ct' = ct \cdot \cosh \varphi - x \cdot \sinh \varphi$	$\gamma = \cosh \varphi$ $\gamma\beta = \sinh \varphi$
$x' = -ct \cdot \sinh \varphi + x \cdot \cosh \varphi$	
$y' = y$	
$z' = z$	

Für 4-Vektoren ergibt sich dann die spezielle Lorentz-Transformation in Matrix-Schreibweise zu:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \varphi & -\sinh \varphi & 0 & 0 \\ -\sinh \varphi & \cosh \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Allgemeiner erhält man mit: $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$ und $\beta = |\vec{\beta}|$:

$$ct' = \gamma (ct - \vec{\beta} \cdot \vec{v})$$

$$\vec{x}' = \vec{x} + \frac{(\gamma - 1)}{\beta^2} (\vec{\beta} \cdot \vec{x}) \vec{\beta} - \gamma \vec{\beta} ct$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta_1\gamma & -\beta_2\gamma & -\beta_3\gamma \\ -\beta_1\gamma & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_1^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_3}{\beta^2} \\ -\beta_2\gamma & \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_2}{\beta^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_2^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_2\beta_3}{\beta^2} \\ -\beta_3\gamma & \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_3}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_2\beta_3}{\beta^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_3^2}{\beta^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

2.4 Kontra-/Kovariante Formulierung der speziellen Relativitätstheorie (SRT)

- **EINSTEIN'sche Summenkonvention:** Über alle doppelt auftauschenden oberen und/oder unteren Indizes wird summiert. Im dreidimensionalen Raum ist die Summe $\sum_{i=0}^2 \dots$ gemeint; im vierdimensionalen Minkowski-Raum (Raumzeit) die Summe $\sum_{i=0}^3 \dots$. Diese Konvention gilt im Folgenden immer, außer es wird explizit angegeben!

- **Komponentenweise Formulierung der linearen Algebra (Formelzusammenstellung):**

– *Lineare Abbildung* Es sei die $m \times n$ -Matrix $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ gegeben. Die Abbildung $A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ eines $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ läßt sich dann folgendermaßen schreiben:

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = a_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$$

- *Skalarprodukt*: Ist $B = (b_{ij})$ die vermittelnde Matrix eines Skalarproduktes (Bilinearform), so gilt:

$$\langle x, y \rangle = x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_i y_i$$

$$\langle x, y \rangle_B = x^T B y = x^T (B y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} x_i y_j = b_{ij} x_i y_j$$

- *Matrixprodukt*: Das Produkt einer $l \times m$ -Matrix $A = (a_{pq})$ und einer $m \times n$ -Matrix $B = (b_{rs})$ lässt sich darstellen als:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj} = a_{ik} b_{kj} \quad 1 \leq i \leq l, \quad 1 \leq j \leq n$$

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{im} b_{mj}$$

- *Zusammenstellung*:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = a_{ij} x_j \\ & (x_1, \dots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_i y_i \\ & (x_1, \dots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} : = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} x_i y_j = b_{ij} x_i y_j \\ & \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} : c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = a_{ik} b_{kj} \\ & \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \right] : d_{ij} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n c_{ik} a_{kl} b_{lj} = c_{ik} a_{kl} b_{lj} \\ & \left[\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : y_i = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} x_j = a_{ik} b_{kj} x_j \\ & \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right] : y_i = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ij} b_{jk} x_k = a_{ij} b_{jk} x_k \end{aligned}$$

- **Allgemeines Verhalten von Tensoren unter Koordinaten-Transformationen $x \rightarrow x'$** : Über ihr Verhalten unter der Transformation $x^\alpha \rightarrow x'^\alpha \equiv f^\alpha(x^0, x^1, x^2, x^3)$ bzw. der Umkehrtrafo $x'^\alpha \rightarrow x^\alpha \equiv g^\alpha(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$ werden Tensoren k -ter Stufe definiert:

- *Skalare* ($k = 0$): bleiben unter der gegebenen Trafo (LORENTZ-)invariant.

- **Vektoren** ($k = 1$): Bei Vektoren werden zwei Fälle unterschieden: ko- und kontravariante Vektoren.

Kontravariante Vektoren A^α (mit den Komponenten A^0, A^1, A^2, A^3) verhalten sich unter der gegebenen Trafo, wie folgt (Komponente α):

$$\alpha = 0..3: \quad A'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} A^\beta \equiv \sum_{\beta=0}^3 \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} A^\beta$$

Konvariante Vektoren A_α (mit den Komponenten A_0, A_1, A_2, A_3) verhalten sich unter der gegebenen Trafo, wie folgt (Komponente α):

$$\alpha = 0..3: \quad A'_\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} A_\beta \equiv \sum_{\beta=0}^3 \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} A_\beta$$

Dabei ergeben sich die $x'^\alpha = f^\alpha(x^0, x^1, x^2, x^3)$ und die $x^\beta = g^\beta(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$

- **Tensoren 2-ter Stufe**: Bei Tensoren 2-ter Stufe (Matrizen) erhält man unter den Trafos:

$$F'^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\delta} F^{\gamma\delta} \equiv \sum_{\gamma=0}^3 \sum_{\delta=0}^3 \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\delta} F^{\gamma\delta}; \quad G'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\beta} G_{\gamma\delta} \equiv \sum_{\gamma=0}^3 \sum_{\delta=0}^3 \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\beta} G_{\gamma\delta};$$

$$H'_\beta{}^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\beta} H_\gamma{}^\delta \equiv \sum_{\gamma=0}^3 \sum_{\delta=0}^3 \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\beta} H_\gamma{}^\delta;$$

- **Ko- und Kontravariante Größen in der SRT**: In der SRT ist die Geometrie der Raum-Zeit über die Invariante des Längenquadrates $s^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = c^2 t^2 - \vec{x}^2$ gegeben. Dies lässt sich über den metrischen Tensor darstellen:

$$g_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \quad \text{mit: } g_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta} = \delta_\alpha^\beta = \begin{cases} 1 & \alpha = \beta \\ 0 & \alpha \neq \beta \end{cases}$$

Jetzt gilt nämlich:

$$s^2 = c^2 t^2 - \vec{x}^2 = g_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{\beta=0}^3 g_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta$$

Der metrische Tensor vermittelt im Minkowski-Raum also das Skalarprodukt, über das dessen Metrik definiert ist. Für Vierer-Raumzeit-Vektoren $\vec{a} = (a^0, a^1, a^2, a^3), \vec{b} = (b^0, b^1, b^2, b^3)$ gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = b_\alpha a^\beta = g_{\alpha\beta} b^\alpha a^\beta = (b^0, b^1, b^2, b^3) \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3$$

- **Vektoren (Tensor 1. Stufe)**: Es gilt:

$$x_\alpha = g_{\alpha\beta} x^\beta = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) \quad x^\alpha = g^{\alpha\beta} x_\beta = (x_0, -x_1, -x_2, -x_3)$$

Kontravariante Vektoren a^α verhalten sich unter einer LORENTZ-Transformation Λ_ν^μ , wie folgt:

$$a'^\alpha = \Lambda_\nu^\alpha a^\nu = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda_\nu^\alpha a^\nu$$

– *Tensoren 2. Stufe*: Es gilt:

$$\begin{aligned} T_{\alpha}{}^{\beta} &= g_{\alpha\gamma} T^{\gamma\beta} = (g_{ij}) \cdot (T^{ij}) & T^{\alpha}{}_{\beta} &= g_{\beta\gamma} T^{\alpha\gamma} = (T^{ij}) \cdot (g_{ij}) \\ T_{\alpha\beta} &= g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} T^{\gamma\delta} = (g_{ij}) \cdot (T^{ij}) \cdot (g_{ij}) \end{aligned}$$

3.0.1 Einheitensysteme

3.0.2 Formelsammlung

•

3.0.3 Laplace-Gleichung

Die Laplacegleichung $\Delta\Phi(\vec{r}) = 0$ hat in Kugelkoordinaten $\vec{r} = (r, \phi, \theta)$ die Form:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2(r\Phi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0$$

Man macht zur Lösung den Produktansatz: $\Phi = \frac{U(r)}{r} P(\theta) Q(\phi)$ und erhält aus obiger Gleichung:

$$PQ \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{UQ}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \frac{UP}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{d^2 Q}{d\phi^2} = 0$$

Man multipliziert mit $\frac{r^2 \sin^2 \theta}{UPQ}$ und erhält weiter:

$$\underbrace{r^2 \sin^2 \theta \left[\frac{1}{U} \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{Pr^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) \right]}_{= m^2} + \underbrace{\frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\phi^2}}_{= -m^2} = 0$$

Von ϕ hängt jetzt nur noch der letzte Teil der DGL ab. Also kann man mit $m = \text{const}$ für $Q(\phi)$ die folgende DGL abspalten und erhält als Lösung:

$$\frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\phi^2} = -m^2 \quad \Rightarrow \quad Q = e^{\pm im\phi}$$

Damit Q im ganzen Winkelbereich $0 \leq \phi \leq 2\pi$ gültig ist, muss $m \in \mathbb{Z}$ gelten. Aus dem ersten Teil

erhält man mit $l = \text{const}$:

$$r^2 \sin^2 \theta \left[\frac{1}{U} \cdot \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{Pr^2 \sin \theta} \cdot \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \cdot \frac{dP}{d\theta} \right) \right] = m^2 \quad \left| \cdot \frac{1}{\sin^2 \theta} \right.$$

$$\underbrace{\left[\frac{r^2}{U} \cdot \frac{d^2 U}{dr^2} \right]}_{= l(l+1)} + \underbrace{\left[\frac{1}{P \sin \theta} \cdot \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \cdot \frac{dP}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right]}_{= -l(l+1)} = 0$$

Und damit die zwei separierten DGLs:

$$\frac{d^2 U}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \cdot U = 0$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \cdot \frac{dP}{d\theta} \right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \cdot P = 0$$

Für die erste DGL ergibt sich die Lösung $U_l = A_l \cdot r^{l+1} + B_l \cdot r^{1-l}$.

Setzt man $m^2 = 0$, so erhält man aus den obigen Überlegungen die Lösung der **Laplace-Gleichung für Probleme mit azimuthaler Symmetrie**. Die Lösung ist dann nicht vom Winkel ϕ abhängig. Aus Der DGL für P ergibt sich mit der Definition $x := \cos \theta$ die gewöhnliche Legendre'sche Differentialgleichung:

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \cdot \frac{dP(x)}{dx} \right) + l(l+1) \cdot P(x) = 0$$

Daraus erhält man die Lösungsfunktionen $P_l(x)$ ($l \in \mathbb{N}_0$):

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l \cdot l!} \cdot \frac{d^l (x^2 - 1)^l}{dx^l}$$

Damit erhält man als Lösung der Laplace-Gleichung für azimuthale Symmetrie:

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}] \cdot P_l(\cos \theta)$$

Für **Probleme mit spherischer Symmetrie** ist $m \in \mathbb{Z}$ beliebig und man erhält mit $x := \cos \theta$ für P die zugeordnete Legendre'sche DGL mit den Lösungen:

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{d^m P_l(x)}{dx^m}$$

Da sowohl die $P_l^m(x)$, als auch die $Q_m(\phi)$ ein orthogonales Funktionensystem bilden, so ist auch Ihr Produkt $Y_{l,m}(\theta, \phi) := c \cdot P_l^m(\cos \theta) \cdot Q_m(\phi)$ ein orthogonales Funktionensystem. Mit der richtigen Normierungskonstante c ergeben sich die sog. **Kugelflächenfunktionen**:

$$Y_{l,m}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \cdot P_l^m(\cos \theta) \cdot e^{im\phi}$$

Sie haben folgende Eigenschaften:

- *komplexe Konjugation:* $Y_{l,-m}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{l,m}^*(\theta, \phi)$

- *Orthonormalitätsrelation:*

$$\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} Y_{l',m'}^*(\theta, \phi) \cdot Y_{l,m}(\theta, \phi) \underbrace{\cos \theta \, d\theta \, d\phi}_{= d\Omega} = \delta_{l'l} \cdot \delta_{m'm}$$

- *Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen:* Eine Funktion $g(\theta, \phi)$ mit $0 \leq \phi \leq 2\pi$ und $0 \leq \theta \leq \pi$ lässt sich nach Kugelflächenfunktionen entwickeln:

$$g(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} Y_{l,m}(\theta, \phi) \quad \text{mit: } A_{lm} := \int Y_{l,m}^*(\theta, \phi) \cdot g(\theta, \phi) \, d\Omega$$

Damit erhält man als Lösung der Laplace-Gleichung für spherische Symmetrie:

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)}] \cdot Y_{l,m}(\theta, \phi)$$

KAPITEL 4

Thermodynamik

KAPITEL 5

Quantenmechanik

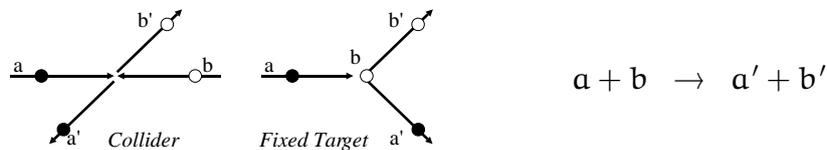
siehe gesonderte Formelsammlung

6.1 Streuprozesse

6.1.1 Einleitung

elastische Streuprozesse

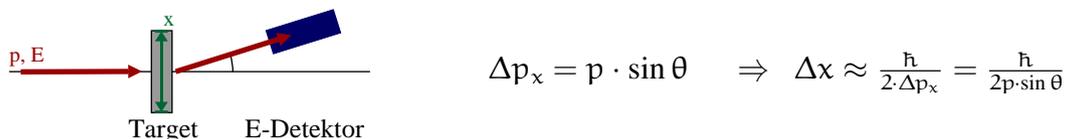
Bei einem elastischen Streuprozess sind die Teilchen vor und nach der Streuung identisch. Sie unterscheiden sich nur in ihren kinetischen Energien und ihren Impulsen.



Die deBroglie-Wellenlänge eines Teilchens mit Energie E ist:

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda_{DB}} \Rightarrow \lambda_{DB} = \frac{2\pi \cdot \hbar c}{E}.$$

Die Auflösung wird bei Streuexperimenten durch die Unschärferelation $\Delta p_x \cdot \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$ bestimmt. Dabei interessiert hier also in folgendem Aufbau die Impulskomponente parallel zur aufzulösenden Strecke Δx :



Es können maximal Strukturen aufgelöst werden, für die die deBroglie-Wellenlänge der Probe-Teilchen kleiner als die Ausdehnung ist

$$\lambda_{DB} \leq \Delta x = \frac{\hbar}{2 \cdot \Delta p_x} = \frac{\hbar c}{2E \cdot \sin \theta}.$$

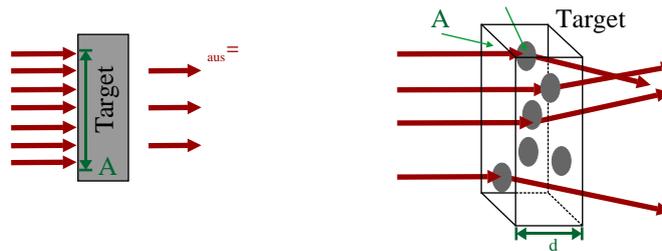
inelastische Streuprozesse

Bei inelastischen Streuungen werden neue Teilchen erzeugt:



Entweder sie entstehen direkt aus der Reaktion, oder ein Teilchen wird in einen angeregten Energiezustand b^* gebracht und dieser zerfällt dann in weitere Teilchen.

6.1.2 Wirkungsquerschnitt



Ein Strahl von Teilchen in einem Experiment wird durch seinen Teilchenfluss Φ beschrieben:

$$\Phi = \frac{\text{Teilchen}}{\text{Zeit} \cdot \text{Fläche}} = \frac{\Delta N_{\text{Beam}}}{\Delta t \cdot A}$$

Ein Teil der einfallenden Teilchen reagieren mit dem Target. Im gesamten Target gibt es N_{Tar} Streuzentren:

$$N_{\text{Tar}} = \frac{\rho \cdot A d}{m_{\text{mol}}} \cdot N_A$$

Der Proportionalitätsfaktor zwischen Übergangsrate W und einlaufendem Fluss heißt *Wirkungsquerschnitt* σ ($W = \sigma \cdot \Phi_{\text{ein}}$). Es handelt sich anschaulich um die Fläche eines Streuzentrums.

$$\sigma = \frac{\text{Anzahl Reaktionen pro Zeit}}{\text{einfallender Fluss} \cdot \text{Anzahl Streuzentren}} = \frac{dN_{\text{reac}}/dt}{\Phi \cdot N_{\text{Tar}}} = \frac{dN_{\text{reac}}/dt}{\frac{dN_{\text{Beam}}}{dt} \cdot N_A \cdot \frac{\rho \cdot d}{m_{\text{mol}}}}$$

Die Reaktionsrate ergibt sich dann zu:

$$R_{\text{reac}} = \frac{dN_{\text{reac}}}{dt} = \frac{dN_{\text{beam}}}{dt} \cdot n_{\text{tar}} \cdot d \cdot \sigma, \quad n_{\text{tar}} = \frac{N_{\text{tar}}}{V_{\text{tar}}} = N_A \cdot \frac{\rho}{m_{\text{mol}}}$$

6.2 Übersichtstabellen

6.2.1 Quarks

Alle Quarks haben Spin $J = \frac{1}{2}$ und Baryonenzahl $B_y = \frac{1}{3}$, sind also *Fermionen*.

- Isospin I, I_3
- Ladung Q
- Strangeness S

- Charm C
- Bottom/Beauty B
- Top/truth T

Name		I	I_3	Q	S	C	B	T	Masse [GeV/c ²]
up	u	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	0	0	0	0	≈ 350
down	d	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	0	≈ 350
strange	s	0	0	$-\frac{1}{3}$	-1	0	0	0	≈ 550
charm	c	0	0	$+\frac{2}{3}$	0	1	0	0	≈ 1800
bottom	b			$-\frac{1}{3}$	0	0	-1	0	≈ 4500
top	t			$+\frac{2}{3}$	0	0	0	+1	≥ 78000

Es gilt:

$$Q = I_3 + \frac{1}{2} (B + S + C + B_y + T)$$

6.2.2 Standardmodell

Fermionen	Familie			Q	Wechselwirkungen			
	1	2	3		Grav. G	EM γ	schwach W, Z	stark g
Leptonen	e^-	μ^-	τ^-	-1	x	x	x	
Lepton-Neutrinos	ν_e	ν_μ	ν_τ	0	x		x	
Quarks	u	c	t	$+\frac{2}{3}$	x	x	x	x
	d	s	b	$-\frac{1}{3}$	x	x	x	x

6.2.3 Barionen

Allgemeiner Aufbau aus drei Quarks: (QQQ), mit halbzahligen Spin (Fermionen) $J = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$

- Spin J
- Ladung Q
- Strange S
- Isospin I, I_3

Name	Quarks	Masse [GeV/c ²]	J	Q	S	I	I_3
Proton p	(uud)	0.938		1			
Neutron n	(udd)	0.940		0			
Lambda Λ	(uds)	1.116		0	-1		

6.2.4 Mesonen

Allgemeiner Aufbau aus Quark-Antiquark-Paar: $(Q\bar{Q})$, mit ganzzahligem Spin $J = 0, 1$.

- Spin J
- Ladung Q
- Strange S
- Isospin I, I_3

Name	Quarks	Masse [GeV/c ²]	J	Q	S	I	I ₃
Pionen	π^+	$(u\bar{d})$	0.140	+1			
	π^0	$(u\bar{u} + d\bar{d})$	0.135	0			
	π^-	$(\bar{u}d)$	0.140	-1			
Kaonen	K^+	$(u\bar{s})$	0.494	+1			
	K^0	$(d\bar{s})$	0.498	0			
	K^-	$(\bar{u}s)$	0.494	-1			

7.1 Stochastische Prozesse

7.1.1 Allgemeine Definitionen

- Ω bezeichnet die Menge aller möglichen Versuchsausgänge. Ein beliebige Element $\omega \in \Omega$ bezeichnet man als *Elementarereignis*. Eine Menge $A \subset \Omega$ von Elementarereignissen bezeichnet man als *Ereignis*.
- Jedem Ereignis $A \subset \Omega$ wird eine Wahrscheinlichkeit $P(A) \in \mathbb{R}$ zugeordnet. Für eine solche Wahrscheinlichkeitsfunktion $P : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ müssen die *Axiome von Kolmogorow* erfüllt sein:

1. $P(A) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P(\bigcup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$, für disjunkte Ereignisse $A_i \subset \Omega$ (also: $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$).

- **Zufallsvariablen:** Eine Funktion

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \omega \mapsto x_\omega$$

die jedem möglichen Ereignis eine Zahl zuordnet wird als *Zufallsvariable* oder *stochastische Variable* bezeichnet, falls sie folgende Bedingungen erfüllt:

1. für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $A_\lambda := \{\omega | X(\omega) \leq \lambda\}$ ein Ereignis, also $A_\lambda \subset \Omega$
2. $P(\{\omega | X(\omega) = \infty\}) = 0 = P(\{\omega | X(\omega) = -\infty\})$

- **Verteilungsfunktion:** Die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariable X ist:

$$P_X(\lambda) = P(A_\lambda) = P(\{\omega | X(\omega) \leq \lambda\})$$

- **Wahrscheinlichkeitsdichte:** Sei $P_X(\lambda)$ eine Verteilungsfunktion und $[a, b]$ das Intervall der möglichen Werte für λ , also $P : [a, b] \rightarrow [0, 1]$. Man definiert dann die sog. *Wahrscheinlichkeitsdichte* $p(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, als Funktion mit folgenden Eigenschaften:

1. $P_X(\lambda) = \int_a^\lambda p(x) dx$
2. $p(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$
3. $\int_a^b p(x) dx = 1$ (Normierung)

Ist das Intervall $[a, b]$ diskret, so ergibt sich mit

$$P_i := P(x_i) = \text{'Wahrscheinlichkeit für den } i\text{-ten Wert } x_i\text{'}$$

analog:

$$P(x) = \sum_i P_i \cdot \delta(x - x_i), \quad \sum_i P_i = 1$$

• **Charakteristische Größen für Zufallsvariable X :**

– **Mittelwert:**

$$\mu_X = \langle X \rangle = \int_I x \cdot p(x) dx$$

– **Varianz:**

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 = \int_I (x - \mu_X)^2 \cdot p(x) dx$$

– **Standardabweichung:**

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

– **Median $\mu_{\frac{1}{2}}$:**

$$\int_a^{\mu_{\frac{1}{2}}} p(x) dx = \int_{\mu_{\frac{1}{2}}}^b p(x) dx$$

– **α -Quantil x_α :**

$$\int_a^{x_\alpha} p(x) dx = \alpha$$

7.1.2 Stochastische Prozesse

- **Definition:** Sei X eine stochastische Variable und t ein Parameter. So kann man mithilfe von X beliebige weitere stochastische Variablen definieren. Z.B.:

$$Y_X(t) := f(X, t)$$

Eine solche Variable $Y(t)$ bezeichnet man als *Stochastischen Prozess*, falls t die Zeit darstellt. Setzt man für X einen möglichen Wert x ein, so erhält man die sog. *Realisierung des Prozesses* oder *Sample-Funktion*:

$$Y_x(t) = f(x, t).$$

- **Mittelwerte:**

$$\langle Y(t) \rangle = \int Y_x(t) \cdot P_X(x) dx$$

oder allgemeiner für n Zeiten t_1, \dots, t_n :

$$\langle Y(t_1)Y(t_2)\dots Y(t_n) \rangle = \int Y_x(t_1) \cdot Y_x(t_2)\dots Y_x(t_n) \cdot P_X(x) dx$$

- **Autokorrelationsfunktion:**

$$K(t_1, t_2) = \langle \langle Y(t_1)Y(t_2) \rangle \rangle = \langle Y(t_1)Y(t_2) \rangle - \langle Y(t_1) \rangle \langle Y(t_2) \rangle$$

Für $t_1 = t_2 = t$ ergibt sich die zeitabhängige Varianz:

$$\sigma^2(t) = \langle \langle Y^2(t) \rangle \rangle$$