Stoffzusammenfassung: Lineare Algebra

Jan Krieger

28. September 2004

INHALTSVERZEICHNIS

KAPITEL 1

Grundbegriffe

1.1 Mengen, Abbildungen Gruppen, Ringe, Körper

1.1.1 Mengen

$\sharp M = \|M\|$:	Mächtigkeit der Menge M (Anz. der enth. Elemente)
$\{\} = \varnothing$:	leere Menge
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$:	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\}$:	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \| p \in \mathbb{Z}; q \in \mathbb{N} \right\}$:	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$:	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{C} = \left\{ a + ib \| a, b \in \mathbb{R} \text{ und } i^2 = -1 \right\}$:	Menge der komplexen
$K[X]$:	Polynomring in der unbestimmten X über K.

Seien M_1 und M_2 Mengen:

- M_1 ist Teilmenge von M_2 ($M_1 \subset M_2$), wenn $x \in M_1 \Rightarrow x \in M_2$
- Schnittmenge: $M_1 \cap M_2 = \left\{ x \middle| x \in M_1 \text{ und } x \in M_2 \right\}$
- Vereinigungsmenge: $M_1 \cup M_2 = \left\{ x \middle| x \in M_1 \text{ oder } x \in M_2 \right\}$
- Differenzmenge: M_1
  $M_2 = \left\{ x \middle| x \in M_1 \text{ und } x \notin M_2 \right\}$
- kartesisches Produkt: $M_1 \times M_2 = \left\{ (x_1, x_2) \middle| x_1 \in M_1 \text{ und } x_2 \in M_2 \right\}$
- zwei Mengen heißen disjunkt, wenn $M_1 \cap M_2 = \varnothing$

1.1.2 Äquivalenzrelationen und -klassen

- Eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf einer Menge M ist eine beziehung zwischen ihren Elementen, mit den Eigenschaften $(a, b, c \in M)$:

- $a \sim a$ (Reflexivität)
- $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ (Symmetrie)
- $a \sim b, b \sim c \Rightarrow b \sim c$ (Transitivität)

- Eine Äquivalenzklasse $[a]$ auf einer Menge M ist definiert als: $[a] := \{b \in M \mid b \sim a\}$ mit $a \in M$.
- Jede Menge zerfällt in disjunkte Äquivalenzklassen, denn gäben es ein x mit $x \in [a]$ und $x \in [b]$, also $x \sim a$ und $x \sim b$, so gilt $a \sim x \sim b \Rightarrow a \sim b \Rightarrow [a] = [b]$.

1.1.3 Abbildungen

Eine *Abbildung* $f : A \to B, a \mapsto f(a)$ ordnet **jedem** Element der Menge A **genau ein** Element der Menge B zu.

- Eine Abbildung heißt *injektiv* oder *eindeutig*, wenn $\forall a_1, a_2 \in A\ \exists b \in B : ((a_1, b), (a_2, b) \in f \Rightarrow a_1 = a_2)$. D.h. eine injektive Abbildung ordnet jedem Element $a \in A$ eindeutig ein $b \in B$ zu, sodass keine zwei unterschiedlichen $a_1, a_2 \in A$ auf das selbe b abgebildet werden. Zu jedem $b \in B$ lässt sich also nur genau ein $a \in A$ finden, dass auf b durch f abgebildet wird.
- Eine Abbildung heißt *surjektiv*, wenn $\forall b \in B\ \exists a \in A : ((a, b) \in f)$ bzw. $f(A) = B$. D.h. Jedes Element der Ergebnismenge B muss durch $f(a)$ mit einem $a \in A$ ausgedrückt werden können. B lässt sich also vollständig aus A durch die Abbildung f „erzeugen“.
- Eine Abbildung heißt *bijektiv*, wenn sie sowohl injektiv, als auch surjektiv ist. Eine solche Abbildung ist eineindeutig. Sie ordnet jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ zu und trifft dabei jedes Element in B genau einmal.
- **Komposition**: $f(g(x)) \Leftrightarrow f \circ g$
- **Identität**: $f(g(x)) = x \Leftrightarrow f \circ g = id_x$
- Ist eine Abbildung $f : X \to Y$ bijektiv, dann existiert eine **Umkehrfunktion** $f^{-1} : Y \to X$ mit $f^{-1}(f(x)) = x$ bzw. $f^{-1} \circ f = id_x$ und $f \circ f^{-1} = id_y$ mit $x \in X$ und $y \in Y$.
- Alternativdefinition für Injektivität, Surjektivität, Bijektivität ($f : X \to Y$):
  - f injektiv $\Leftrightarrow$ es existiert eine Abbildung $g : Y \to X$ mit $g \circ f = id_x$ bzw. $g(f(x)) = x$. *Da ein $y \in Y$ nur genau einmal 'getroffen' wird, kann man eine Abbildung angeben, die jedem Bild das Urbild zuordnet. Sie muss nur auf der Bildmenge $f(X) \subset Y$ definiert sein!*
  - f surjektiv $\Leftrightarrow$ es existiert eine Abbildung $g : Y \to X$ mit $f \circ g = id_y$ bzw. $f(g(y)) = y$. *Da jedes Element $y \in Y$ getroffen wird, kann man eine Abbildung angeben, die jedem solchen y ein $x = g(y)$ zuordnet, sodass dieses von f auf sich selbst abgebildet wird.*
  - f bijektiv $\Leftrightarrow$ es existiert eine Abbildung $g : Y \to X$ mit $g \circ f = id_x$ und $f \circ g = id_y$, also ist $g = f^{-1}$.

1.1.4 Gruppen

- Eine *Gruppe* ist ein Paar $(G, *)$ bestehend aus einer nicht-leeren Menge G und einer Verknüpfung "$*$" auf G, d.h. einer Abbildung

$$* : \begin{cases} G \times G & \longrightarrow & G \\ (a, b) & \longmapsto & a * b \end{cases}$$

mit folgenden Gruppenaxiomen:

G1: Assoziativgesetz $a * (b * c) = (a * b) * c$.

G2: Es gibt ein "neutrales" Element e derart, dass: für alle $a \in G$: $a * e = a = e * a$.

G3: zu jedem $a \in G$ gibt es ein "inverses" Element $a^{-1} \in G$ mit $a * a^{-1} = e = a^{-1} * a$.

- Es gibt genau ein neutrales Element $e \in G$.

- Zu jedem $a \in G$ gibt es genau ein inverses Element $a^{-1} \in G$. Weiterhin gilt $(a^{-1})^{-1} = a$ und $(a * b)^{-1} = a^{-1} * b^{-1}$ für $a, b \in G$.

- Eine Gruppe $(G, *)$ heißt *abel'sche Gruppe (kommutativ)*, falls das Kommutativgesetz gilt, d.h. $a * b = b * a$ für alle $a, b \in G$.

- Sei $(G, *)$ eine nicht-leere Menge mit einer assoziativen Verknüpfung. Dann gilt $(G, *)$ ist eine Gruppe $\Longleftrightarrow$ zu je zwei Elementen $a, b \in G$ gibt es ein $x, y \in G$ mit $x * a = b$ und $a * y = b$.

- **Untergruppe:** Sei G eine Gruppe mit Verknüpfung $+$ und $G' \subset G$ eine nichtleere Teilmenge.. G' heißt *Untergruppe*, wenn für $a, b \in G'$ gilt: $a + b \in G'$, $\quad a^{-1} \in G'$.

- **Homomorphismus von Gruppen:** Seien G und H Gruppen mit Verknüpfungen $+$ und $\oplus$. Eine Abbildung $\varphi : G \to H$ heißt *Homomorphismus von Gruppe*, wenn gilt:

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) \oplus \varphi(b), \qquad \forall a, b \in G$$

Es gilt ($e \in G$, $\mathbf{e} \in H$ bezeichnen die neutralen Elemente):

  - $\varphi(e) = \mathbf{e}$.
  - $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$.
  - Ist φ Isomorphismus, so ist φ^{-1} Homomorphismus.

- **Beispiele für Gruppen:**

  - *Lineare Gruppe:* Die Menge $M := \left\{A \in K^{n \times n} \middle| A \text{ invertierbar}\right\}$ ist zusammen mit der Matrixmultiplikation $\cdot$ eine Gruppe mit neutralem Element E_n:

$$GL(n, K) := (M, \cdot).$$

  - *orthogonale und unitäre Gruppe*
  - *Gruppe der bijektiven Abbildungen/symmetrische Gruppe, Permutationsgruppe:* Die Menge

$$\mathbf{S}(X) := \left\{f : X \to X \middle| f \text{ bijektiv}\right\}$$

ist zusammen mit der Hintereinanderausführung als Verknüpfung eine Gruppe.
Ist $X_n = \{1, ..., n\} \subset \mathbb{N}$, so nennt man jedes $\sigma \in \mathbf{S}_n(X_n)$ eine *Permutation* und die Gruppe $\mathbf{S}(X_n)$ die *Permutationsgruppe*.

- $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind mit der Addition Gruppen.
  $\mathbb{Z}$ ist mit der Multiplikation keine Gruppe, weil es nicht zu jedem $z \in \mathbb{Z}$ ein Inverses gibt.
- *zyklische Gruppe:* Man teilt die ganzen Zahlen in $m \in \mathbb{N}$ disjunkte Teilklassen: Zu jedem $r \in \{0, 1, ..., m-1\}$ betrachtet man die Menge:

  $$r + m\mathbb{Z} := \{r + a \cdot m | a \in \mathbb{Z}\}.$$

  Damit ist die Menge $r + m\mathbb{Z}$ die Menge aller Zahlen $x \in \mathbb{Z}$, für die gilt: $r = x \mod m$. Daher nennt man $r + m\mathbb{Z}$ die *Restklasse modulo* m. Man kann mit diesen Mengen $\mathbb{Z}$ disjunkt zerlegen:

  $$\mathbb{Z} = (0 + m\mathbb{Z}) \sup (1 + m\mathbb{Z}) \cup ... \cup (m - 1 + m\mathbb{Z}).$$

  Man kann nun in der Menge der Restklassen $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} := \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1}\}$ eine Addition erklären ($\overline{a} := a + m\mathbb{Z}$ ist die zu a gehörende Restklasse und $x \in \overline{a}$ heißt Repräsentant der Restklasse):

  $$\overline{a} + \overline{b} := \overline{(a + b)}$$

  Zusammen mit dieser Addition ist die Menge $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ der Restklassen modulo m ein abel'sche Gruppe.

1.1.5 Ringe

- Ein *Ring* $(R, +, *)$ besteht aus einer Menge R und zwei Verknüpfungen:

  $$+ : \left\{ \begin{array}{ccc} R \times R & \longrightarrow & R \\ (a, b) & \longmapsto & a + b \end{array} \right. ; \quad * : \left\{ \begin{array}{ccc} R \times R & \longrightarrow & R \\ (a, b) & \longmapsto & a * b \end{array} \right.$$

  so dass gilt:

  R1: $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe. 0 bezeichnet das neutrale Element.

  R2: $(R, *)$ ist assoziativ ($a * (b * c) = (a * b) * c$) und besitzt neutrales Element $1 \neq 0$. DIe Existenz eines Inversen ist nicht nötig.

  R3: Das Distributivgesetz zu $a, b, c \in R$ gilt:

  $$(a + b) * c = a * c + b * c$$

  $$a * (b + c) = a * b + a * c$$

- $(R, +, *)$ heißt *kommutativer Ring*, falls $(R, *)$ kommutativ ($a * b = b * a$) ist.
- $(R, +, *)$ heißt *nullteilerfrei*, falls für alle $a, b \in R$ gilt: $a * b = 0 \Rightarrow a = 0$ oder $b = 0$.
- Die Menge aller invertierbaren Elemente eines Ringes R bezeichnet man mit $R^\times$. Sie heißen *Einheiten* von R.
- **Unterringe:** Ist R ein Ring und $R' \subset R$ eine Teilmenge, so heißt R' *Unterring*, wenn R' bezüglich Addition Untergruppe ($a, b \in R' \Rightarrow a + b, -a \in R'$) und bezüglich der Multiplikation abgeschlossen ($a, b \in R' \Rightarrow a \cdot b \in R'$) ist.
- **Ideal eines Ringes:** Sei $(R, +, \cdot)$ ein komutativer Ring. Eine Teilmenge $\mathcal{I} \in R$ heißt *Ideal von* R, wenn gilt:

I1 $a, b \in \mathcal{I} \quad \Rightarrow \quad a - b \in \mathcal{I}.$

I2 $a \in \mathcal{I}, r \in R \quad \Rightarrow \quad r \cdot a \in \mathcal{I}.$

Die folgende Menge bildet ein Ideal $\mathcal{I}_F$ zum Endomorphismus F:

$$\mathcal{I}_F := \{p(t) \in K[t] \big| p(F) = 0\} \subset K[t].$$

zum Nachweis: Für $p_1, p_2 \in \mathcal{I}_F$ gilt: $(p_1 - p_2)(F) = p_1(F) - p_2(F) = 0 - 0 = 0$. Mit einem Polynom $r \in K[t]$ ($r(F) = F'$) und einem $p \in \mathcal{I}_F$ gilt: $(r \cdot p)(F) = r(F) \cdot p(F) = F' \cdot 0 = 0$.

- **Homomorphismus von Ringen:** Seien R, S Ringe mit den Verknüpfungen $+, \cdot, \oplus, \odot$. Eine Verknüpfung $\varphi : R \to S$ heißt Homomorphismus von Ringen, wenn für alle $a, b \in R$ gilt:

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) \oplus \varphi(b), \qquad \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \odot \varphi(b)$$

- **Beispiele:**
  - $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind zusammen mit Multiplikation und Addition kommutative Ringe.
  - Die Menge der auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ reellwertigen Funktionen ist zusammen mit den folgenden Verknüpfungen ein kommutativer Ring:

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \qquad (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x).$$

  - Auf der Gruppe der Restklassen kann man auch eine Multiplikation erklären, mit der dann $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ zu einem Ring wird.
    Es gilt: Der Ring $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ist genau dann nullteilerfrei, wenn m eine Primzahl ist.
    zum Beweis: *Ist $m = k \cdot l$ mit $1 < k, l < m$ keine Primzahl, so ist: $\bar{k}, \bar{l} \neq \bar{0}$, aber $\bar{0} = \bar{m} = \bar{k} \cdot \bar{l}$.*
  - Polynomring ist kommutativer Ring.

1.1.6 Körper

Bei Ringen hat man das Problem, dass man im Allgemeinen nicht dividieren kann. Dieses Problem wird behoben, indem man die Struktur der Körper einführt, die auch die Inversen der Multiplikation enthalten. Dies geschieht im folgenden Abschnitt.

- Ein *Körper* $(K, +, *)$ ist eine Menge mit zwei Verknüpfungen $+$ und $*$ mit

  K1: $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 0.

  K2: $(K, *)$ ist abelsche Gruppe mit neutralem Element $1 \neq 0$.

  K3: Das Distributivgesetz zu $a, b, c \in R$ gilt:

$$(a + b) * c = a * c + b * c$$

$$a * (b + c) = a * b + a * c$$

- Jeder Körper ist ein Ring.

- Jeder Körper enthällt also neben den Elementen $(a, b, ...)$ selbst noch die 0, die 1 und die Inversen bezüglich der Addition $(-a, -b, ...)$ und der Multiplikation $(a^{-1}, b^{-1}, ...)$. Damit enthält jeder Körper mindestens zwei Elemente: 0 und 1.

- es gilt: $a * 0 = 0 = 0 * a$, $(-a) * b = -a * b$, $a * b = 0 \Longrightarrow a = 0$ oder $b = 0$, also $(K, +, *)$ ist ein nullteilerfreier Ring.
- Die Charakteristik $\text{char}(K)$ einer Körpers K ist folgendermaßen definiert:
Gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $m * 1 = 1 + 1 + ... + 1 = 0$, so ist $\text{char}(K) = p$, wobei $p \in \mathbb{N}$ die kleinste Zahl mit $p * 1 = 0$ ist. Andernfalls $\text{char}(K) = 0$.
- Sei K ein Körper. Dann ist $\text{char}(K) = 0$ oder gleich einer Primzahl.
- Ein Körper K heißt *algebraisch abgeschlossen*, wenn jedes nicht konstante Polynom $f \in K[X]$ eine Nullstelle in K besitzt. D.h. jedes von Null verschiedene Polynom aus $K[X]$ zerfällt über K vollständig in Linearfaktoren.
- **Beispiele:**
  - $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$ sind Körper.
  - Der Restklassenring $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ist ein Körper, wenn m prim ist. Hier ist die Charakteristik des Körpers: $\text{char}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = m$.

1.1.7 Polynome

Da im Folgenden des öfteren Eigenschaften von Polynomen gebraucht werden, sollen diese hier kurz zusammengefasst werden.

- **Polynom:** Sei K ein Körper. Mit einer *Unbestimmten* t, einem Symbol, das als Stellvertreter für eine Zahl steht erklärt man ein *Polynom mit Koeffizienten in* K $f(t)$ als $(a_0, ...a_n \in K)$:
$$f(t) = a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n.$$
Das Polynom $f = 0$ heißt *Nullpolynom*. Gilt $a_n = 1$ so nennt man ein Polynom *normiert*.
- **Polynomring:** Ist K ein Körper, so ist die Menge $K[t]$ der Polynome über K zusammen mit der natürlichen Addition und Multiplikation (durch Ausmultiplizieren) ein kommutativer Ring. Man nennt ihn *Polynomring*.
- **Grad eines Polynoms:** Den Grad eines Polynoms definiert man als:
$$\deg f := \begin{cases} -\infty & \text{falls } f = 0 \\ \max\{\nu \in \mathbb{N} | a_\nu \neq 0\} & \text{sonst} \end{cases}$$
- Für $f, g \in K[t]$ gilt:
$$\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g.$$
- **Division mit Rest:** Es sei $f \neq 0$ ein Polynom aus $K[X]$. Zu jedem Polynom $g \in K[X]$ gibt es dann Polynome $q, r \in K[X]$ mit:
$$g = qf + r \quad \text{und} \quad \text{grad}(r) < \text{grad}(f)$$
- Es sei $g \in K[X]$ ein Polynom mit der Nullstelle $a \in K$ (d.h. $g(a) = 0$), dann gibt es ein $q \in K[X]$ mit
$$g(X) = (X - a) \cdot q(X) \quad \text{und} \quad \deg q = (\deg g) - 1.$$

- Sei K ein beliebiger Körper, $f \in K[t]$ ein Polynom mit $f \neq 0$ und k die Anzahl seiner Nullstellen. Dann gilt:
$$k \leq \deg f.$$
- Ist K ein Körper, so hat Polynom $(f \neq 0) \in K[X]$ vom Grad n höchstens n Nullstellen in K.
- **Vielfachheit von Nullstellen:** Ist $f \in K[t]$ mit $f \neq 0$ ein Polynom und $\lambda \in K$ eine Nullstelle von f, so ist die *Vielfachheit der Nullstelle* λ definiert als:
$$\mu(f, \lambda) := \max\left\{r \in \mathbb{N} \middle| f = (t-\lambda)^r \cdot g \quad \text{mit} \quad g \in K[t]\right\}$$
- Ein Polynom $f \in K[t]$ zerfällt in Linearfaktoren, wenn es zu ihm ein $g \in K[t]$ mit $\deg g = 0$ (also ein konstantes Polynom, bzw. eine Zahl) gibt, so dass ($\lambda_i \in K, i = 1, ..., k$ seien Nullstellen von f und r_i ihre Vielfachheiten):
$$f = (t-\lambda_1)^{r_1} \cdot ... \cdot (t-\lambda_k)^{r_k} \cdot g.$$
- **Fundamentalsatz der Algebra:** Jedes Polynom $f \in \mathbb{C}[t]$ mit $\deg f > 0$ hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$. Jedes solches Polynom zerfällt über $\mathbb{C}$ sogar vollständig in Linearfaktoren.
- Ist $f \in \mathbb{R}[t]$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f, so ist auch das komplex Konjugierte $\overline{\lambda}$ eine Nullstelle von f und es gilt sogar:
$$\mu(f, \lambda) = \mu(f, \overline{\lambda}).$$
- Jedes Polynom $f \in \mathbb{R}[t]$ von ungeradem Grad hat mindestens eine reelle Nullstelle.
- Ein Polynom $p \in K[x]$ vom Grade n wird durch $n+1$ **Wertepaare/Stützstellen** $(x, p(x))$ definiert.
- Sind nur die n Nullstellen eines Polynoms $p \in K[x]$ bekannt, so ist das Polynom bis auf einen Faktor bestimmt: Seien etwa $\lambda_1, ..., \lambda_n$ die Nullstellen des Polynoms $p(x)$. Dann hat p mit einem freien Faktor $\alpha \in K$ die Form:
$$p(x) = \alpha \cdot (x-\lambda_1) \cdot ... \cdot (x-\lambda_n).$$
Man kann ein Polynom n-ten Gtades also durch seine n Nullstellen dafinieren, wenn man verlangt, dass es normiert ist (Faktor der höchsten Potenz: 1).
- **Minimalpolynom eines Ideals von Polynomen:** Zu jedem Ideal $\mathcal{I} \subset K[t]$ mit $\mathcal{I} \neq \{0\}$ gibt es ein eindeutiges Polynom M mit folgenden Eigenschaften:
  1. M ist normiert.
  2. Für jedes $P \in \mathcal{I}$ gibt es ein $Q \in K[t]$ mit $P = Q \cdot M$.

  M heißt *Minimalpolynom von $\mathcal{I}$*.
- **Beispiel zur Polynomdivision:** $K = \mathbb{R}, f = 3t^3 + 2t + 1, g = t^2 - 4t$:
$$\begin{array}{rlll} & \big(3t^3 & & +2t+1\big) \quad : \big(t^2-4t\big) = \underline{\underline{3t+12+\frac{50t+1}{t^2-4t}}} \\ - & \big(3t^3 & -12t^2\big) & \\ & = & 12t^2 & +2t+1 \\ & - & \big(12t^2 & +48t\big) \\ & & = & \underline{50t+1} \ \text{(Rest)} \end{array}$$

1.1.8 Metriken

- **Abstand/Metrik:** Sei X irgend eine Menge. Eine Abbildung $d(\cdot,\cdot): X \times X \to \mathbb{R}$ heißt *Metrik/Abstand* (auf X), wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

  M1 Definitheit: $d(x,y) \geq 0, \quad d(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y$

  M2 Symmetrie: $d(x,y) = d(y,x)$

  M3 Dreiecksungleichung: $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

- Das Paar (X,d) wird metrischer Raum genannt.
- Eine Norm $\|\cdot\|$ induziert auf natürliche Weise eine Metrik auf Vektorräumen:

$$d(x,y) := \|x-y\|\,.$$

1.2 Vektorräume, Rang, Basis ...

Im folgenden bezeichnet V immer einen Vektorraum über dem Körper K.

1.2.1 Vektorräume

- Ein **Vektorraum** (*linearer Raum*) V über einem Körper K ist ein Menge für die es eine Addition und eine skalare Multiplikation

$$+:\begin{cases} V\times V & \longrightarrow & V\\ (a,b) & \longmapsto & a+b\end{cases};\quad \cdot:\begin{cases} K\times V & \longrightarrow & V\\ (a,x) & \longmapsto & a*x\end{cases}$$

  gibt, so dass:

  V1: $(V,+)$ ist eine abel'sche Gruppe mit neutralem Element 0 (*Nullvektor*).

  V2: Die Multiplikation mit *Skalaren* muss in folgender Weise mit der Addition verträglich sein:
  $1\cdot x = x$ für alle $x \in V$, $(a\cdot b)\cdot x = (b\cdot x)\cdot a$ für alle $a,b \in K$, $x \in V$.
  $a\cdot(x+y) = ax + ay$ und $(a+b)\cdot x = ax + bx$ für alle $x,y \in V$, und alle $a,b \in K$.

  Ein Vektorraum über dem Körper $K = \mathbb{R}$ wird *reeller Raum* genannt.

- Sei $W \subset V$ ein Teilmenge. W heißt **Untervektorraum** oder **Teilraum** von V, falls folgendes gilt:

  UV1: $W \neq \varnothing$.

  UV2: $v,w \in W \Rightarrow v+w \in W$ (d.h. abgeschlossen gegenüber der Addition).

  UV3: $v \in W, \lambda \in K \Rightarrow \lambda v \in W$ (d.h. abgeschlossen gegenüber der skalaren Multiplikation).

  Ein Untervektorraum muss also bzgl. Addition und skalarer Multiplikation abgeschlossen sein und darf nicht leer sein.

  $\varnothing \in V$ ist ein Teilraum. $\varnothing$ heißt *trivialer Teilraum*.

  Beispiele:

- *Ebenen und Geraden im $\mathbb{R}^3$ sind Unterräume.*
- *Sei A eine reelle $m \times n$-Matrix. Dann ist die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Gleichungssystems ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$:*
$$W := \left\{x \in \mathbb{R}^n \middle| Ax = 0\right\}.$$
- *Im Vektorraum $V = \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat man die Untervektorräume:*
$$\mathbb{R}[t] \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$
$\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: *differenzierbare Funktionen,* $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *stetige Funktionen*

- Ein Untervektorraum ist zusammen mit der induzierten Addition und Multiplikation wieder ein Vektorraum.

- Sei V ein Vektorraum und I eine beliebige Indemenge. Für jedes $i \in I$ sei weiterhin ein Untervektorraum W_i gegeben. Dann ist der Durchschnitt wieder ein Untervektorraum von V:
$$W := \bigcap_{i \in I} W_i, \qquad \Rightarrow \qquad W \subset V.$$
Für die Vereinigung gilt dieser Satz im Allgemeinen nicht! Als Beispiel kann die Vereinigung zwischen zwei sich schneidenden Geraden im $\mathbb{R}^2$ dienen. Ihr Schnitt besteht aus einem Punkt und ist damit ein Vektorraum.

- Seien $U_1, U_2, ..., U_r$ Teilräume eines Vektorraumes V. Besitzt dann jedes $v \in V$ genau eine Darstellung der Gestalt
$$v = u_1 + u_2 + ... + u_r \quad \text{mit } u_i \in U_i$$
so sagt man V ist die **direkte Summe** der Unterräume $U_1, U_2, ..., U_r$ und man schreibt:
$$V = U_1 \oplus U_2 \oplus ... \oplus U_r = \oplus_{i=1}^r U_i$$

- Die **Summe von Teilräumen** ist definiert als:
$$U_1 + U_2 := \left\{u_1 + u_2 \middle| u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\right\}$$
.

- **Komplementärraum:** Zu jedem Teilraum U eines endlich-dimensionalen vektorraumes V gibt es einen Teilraum W von V, der folgende Eigenschaften besitzt:
  (i) $U \cap W = \{0\}$.
  (ii) $U + W = V$.

  Genau dann ist W ein Komplementärraum zu U in V, wenn sich jeder Vektor v aus V eindeutig darstellen läßt, als:
$$v = u + w \quad \text{mit } u \in U, w \in W$$

- **Dimensionsformel für Teilräume:** Seien U und U' Teilräume eines endlich-dimensionalen K-Vektorraumes V. Dann gilt die Formel:
$$\dim(U + U') = \dim U + \dim U' - \dim(U \cap U')$$
U' heißt *transversal* zu U in V, genau dann wenn: $\dim(U + U') = \dim U + \dim U'$.
U' ist *Komplementärraum* zu U in V, genau dann wenn: $\dim V = \dim(U + U') = \dim U + \dim U'$.

1.2.2 Linearkombination von Vektoren

- Seien $u_1, ..., u_m$ Vektoren ein K-Vektorraumes V. Ein Vektor $v \in V$ heißt **Linearkombination** von $u_1, ..., u_m$, falls es Elemente $a_1, ..., a_m \in K$ gibt, so dass $v = a_1 u_1 + ... + a_m u_m$ ist.
- Sei $M \subseteq V$ eine Teilmenge. So heißt $\text{Lin}\, M := \{v \in V \mid v \text{ ist Linearkombination von Vektoren aus } M\}$ **lineare Hülle** von M. $\text{Lin}\, \varnothing := \{0\}$.
- Es gilt:
  - $M \subseteq \text{Lin}\, M$, $M = \text{Lin}\, M \Leftrightarrow M$ ist Teilraum.
  - $\text{Lin}(\text{Lin}\, M) = \text{Lin}\, M$.
  - $M \subseteq M' \quad \Rightarrow \quad \text{Lin}\, M \subseteq \text{Lin}\, M'$.
- $\text{Lin}\, M$ ist der kleinste Teilraum von V, der die Menge M enthällt.
- Sei V ein K-Vektorraum, so heißen die Vektoren $v_1, ..., v_n \in V$ **linear unabhängig**, falls gilt:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$$

  andernfalls heißen sie **linear abhängig**.

1.2.3 Isomorphie von Vektorräumen

- Gibt es für K-Vektorräume V und W einen Isomorphismus $f : V \to W$, so heißt V *isomorph* zu W, in Zeichen: $V \simeq W$ (Äquivalenzrelation !).
- **Fundamentalsatz für endlich erzeugte Vektorräume:** Jeder endlich erzeugte K-Vektrorraum ist isomorph zu einem K^n. Endloch erzeugte K-Vektrorräume sind genau dann isomorph, wenn gilt:

$$V \simeq W \quad \Leftrightarrow \quad \dim V = \dim W$$

1.2.4 Erzeugendensystem und Basis

- Seien $u_1, ..., u_n$ Vektorewn aus V. $u_1, ..., u_n$ heißen **Erzeugendensystem** von V, wenn

$$V = \text{Lin}(u_1, ..., u_n).$$

- Enthällt ein Erzeugendensystem endlich viele Vektoren, so heißt der aufgespannte Raum *endlich erzeugt*.
- Ein unverkürzbares Erzeugendensystem $b_1, ..., b_n \in V$ (V ist n-dimensionaler K-Vektorraum) heißt **Basis** von V, falls $b_1, ..., b_n$ linear unabhängig sind.
- Folgende Aussagen sind äquivalent:
  - B ist Basis von V.
  - B erzeugt V und B ist linear unabhängig.
  - B ist ein minimales Erzeugendensystem von V (unverkürzbar).
  - B ist eine maximalen linear unabhängige Teilmenge von V.

- Jeder Vektorraum V besitzt eine Basis.
  Jeder endlich erzeugte Vektorraum besitzt eine endliche Basis.

  Die obige Aussage kann man beweisen, indem man systemstisch eine Basis konstruiert: Zuerst nimmt man einen beliebigen Vektor $b_1 \neq 0$. Er bildet sicher eine Basis eines Unterraumes von V. Nun prüft man, ob B_1 den ganzen Raum V aufspannt, also: $\mathrm{Lin}(b_1) = V$. Trifft dies zu, so ist man fertig im anderen Falle wählt man irgendeinen Vektor $b_2 \in V$, der sich nicht in $\mathrm{Lin}(b_1)$ enthalten ist und bildet so eine neue Basis $\{b_1, b_2\}$. Nun fährt man so fort, bis ganz V erzeugt wird.

- **Basisergänzungssatz:** Jede linear unabhängige Teilmenge eine K-Vektorraumes V lässt sich zu einer Basis ergänzen.

- *Koordinatenvektor:* Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum und sei $b = \{b_1, ..., b_n\}$ eine Basis von V. Jeder Vektor $u \in V$ besitzt eine eindeutige Darstellung der Form

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + ... + \lambda_n b_n$$

  Das n-Tupel $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ heißt Koordinatenvektor bzgl. der Basis B.

- **Beispiele:**
  - $1, t, t^2, t^3, ...$ bilden eine unendliche Basis des Polynomrings $K[t]$, der bzgl. der natürlich definierten Addition und Multipikation ein Vektorraum ist. Der Vektorraum der Polynome bis zum Grade n ist immer $n+1$-dimensional, da auf $x^0 = 1$ ein Basisvektor ist.
  - $(1, i)$ ist eine Basis des Vektorraumes $\mathbb{C}$.
  - Die $m \times n$-Matrizen, die nur an der Stelle a_{kl} eine 1 und sonst Nullen haben, sind eine Basis des Vaktorraumes der Matrizen.

$$E_i^j := \begin{pmatrix} & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & 0 & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & 0 & & & \end{pmatrix}$$

1.2.5 Rang und Dimension

- Sei $(u_1, ..., u_m)$ ein m-Tupel von Vektoren aus V (nicht notwendig paarweise verschieden). Der **Rang** von $(u_1, ..., u_m)$ ist r ($r = \mathrm{Rang}(u_1, ..., u_m)$), falls

  1. $\{u_1, ..., u_m\}$ besitzt linear unabhängige Teilmenge aus r Vektoren.
  2. Jede Teilmenge von $\{u_1, ..., u_m\}$ aus $r+1$ Vektoren ist linear abhängig.

  $\mathrm{Rang}(u_1, ..., u_m)$ ist also die maximale Anzahl von linear unabhängigen Vektoren in $(u_1, ..., u_m)$.

- Alle Basen von V haben die selbe Anzahl an Elementen. In Zeichen:
  Seien $B = \{b_1, ..., b_n\}$ und $C = c_1, ..., c_m$ Basen von V, dann gilt $n = m$.

- V hat die **Dimension** $n = \dim_K V$, falls V eine Basis aus n Elementen besitzt (also alle seine Basen n Elemente enthalten). Es gilt:
  - $V = 0 \;\Rightarrow\; \dim_K V = 0$
  - ist V nicht endlich erzeugt, so sagt man V ist unendlich dimensional ($\dim_K V = \infty$).
  - Sei $dim_K V = n$ und $(u_1, ..., u_m)$ ein m-Tupel aus Vektoren aus V. Dann gilt: $B = \{u_1, ..., u_m\}$ ist Basis von V $\Leftrightarrow$ $\text{Rang}(u_1, ..., u_m) = n$ und $n = m$

1.3 Matrizen

- **Rang einer Matrix:** Der (Spalten-)Rang einer beliebigen $n \times m$-Matrix A mit den Spalten-Vektoren $u_1, ..., u_n$ ist gegeben durch:

$$\text{Rang}\, A = \text{Rang}(u_1, ..., u_n)$$

  Der Zeilenrang ist entsprechend definiert und es gilt:
  - Zeilenrang = Spaltenrang
  - Der Rang einer Matrix ist die maximale Zahl ihrer linear unabhängigen Zeilen-/Spaltenvektoren.
- Die Gesamtheit aller $n \times n$-Matrizen über einem Körper K wird mit $M(n, K)$ bezeichnet und ist ein Ring.
- Die transponierte Matrix ${}^tA$ zu einer $m \times n$-Matrix A berechnet sich, wie folgt:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad {}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Eine Matrix $A \in \text{End}_K(V)$ heißt **nilpotent**, wenn es ein $k \geq 1$ gibt, sodass $A^k = 0$.

KAPITEL 2

Lineare Abbildungen

2.1 Homorphismen

- Seien V, W K-Vektorräume. Eine Abbildung $f : V \longrightarrow W$ heißt **Homomorphismus (lineare Abbildung)**, falls ($x, y \in V$ und $a \in K$):

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x)+f(y) \\ f(a \cdot y) &= a \cdot f(x) \end{aligned}$$

  - Ein Homomorphismus $f : V \longrightarrow V$ heißt **Endomorphismus**.
  - Ein Homomorphismus $f : V \longrightarrow W$ heißt **Isomorphismus**, falls f bijektiv ist.
    Man sagt V und W sind *isomorph* (In Zeichen: $V \cong W$).
  - Ein Isomorphismus $f : V \longrightarrow V$ heißt **Automorphismus**.

- Seien V und W K-Vektorräume. Dann bezeichnet $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ die Menge aller linearer Abbildungen (Homomorphismen) von V nach W.
  $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ ist ein K-Vektorraum durch folgende Definition ($f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$, $a \in K$):

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 :\ V \to W, &\quad x \mapsto (f_1+f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x) \\ a \cdot f_a :\ V \to W, &\quad x \mapsto (a \cdot f_2)(x) := a \cdot f_1(x) \end{aligned}$$

  Sind V und W Vektorräume über K, so ist auch $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ ein Vektorraum über K.

- **Rechenregeln für Homomorphismen:**
  - Distributivgesetze: $g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2$ und $(g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f$
  - Assozitaivgesetz: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ und $a(g \circ f) = (ag) \circ f = g \circ (af)$, $a \in K$
  - Es existiert eine identische Abbildung id mit: $\mathrm{id} \circ f = f \circ \mathrm{id} = f$.

- Der **Endomorphismenring** ist definiert durch: $\mathrm{End}_K(V) := \mathrm{Hom}_K(V, V)$
  Es ist weder kommutativ, noch nullteilerfrei.

- Sei $f : V \to W$ ein Homomorphismus. Dann sei:

$$\begin{aligned} \mathrm{Kern}\, f &:= \{v \in V \mid f(v) = 0\} \quad \textbf{Kern} \text{ von } f, \\ \mathrm{Im}\, f &:= \{w \in W \mid \text{Es gibt ein } v \in V \text{ mit } f(v) = w\} \quad \textbf{Bild} \text{ von } f, \\ \mathrm{Rang}\, f &:= \dim(\mathrm{Im}\, f) \end{aligned}$$

  Weiterhin gilt:

  - Sei $F : V \to W$ linear und $B_1, ..., b_n$ Basis von V, sowie $a_i := f(b_i)$ für $i = 1, ..., n$, so gilt:
  $$\dim(\mathrm{Im}\, f) = \mathrm{Rang}(a_1, ..., a_n)$$

- **Dimensionsformel für lineare Abbildungen:** Sei $f : V \to W$ linear und V endlich erzeugt, dann gilt:
$$\dim(\mathrm{Im}\, f) + \dim(\mathrm{Kern}\, f) = \dim V.$$

- Weitere **Kriterien für Injektivität/Surjektivität** einer linearen Abbildung $f : V \to W$:

  - f injektiv $\Leftrightarrow \mathrm{Kern}\, f = \{0\}$
  zum Beweis: *Angenommen es gäbe zwei Vektoren $v, w \in V$ mit $f(v) = f(w)$ (also f nicht injektiv), so folgt: $f(v) - f(w) = f(v - w) = 0$, also ist der Vektor $v - w \in \mathrm{Kern}\, f$. Damit ist der Kern nur gleich $\{0\}$, wenn aus obigen Bedingungen folgt, dass $v = w$, also f injektiv. Die andere Richtung ist klar.*
  - f surjektiv $\Leftrightarrow \mathrm{Im}\, f = W$

2.2 lineare Abbildungen und Matrizen

- Sei $f : V \to W$ linear, $B = (b_1, ..., b_n)$ Basis von V und $C = (c_1, ..., c_n)$ Basis von W. Dann beschreibt die Matrix der Form:

$$A = {}_B M_C(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

  mit durch $f(b_i) = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ji} c_j$, $i = 1, ..., n$ eindeutig bestimmten Zahlen a_{ij} die Abbildung f bezüglich der Basen B und C und heißt Koordinatenmatrix.

  Merkregel: *Das Bild von b_i wird in der Basis C dargestellt. Die dadurch definierten Koeffizienten $a_{1i}, ..., a_{mi}$ bilden die i-te Spalte der Koordinatenmatrix.*

  Dies lässt sich für Abbildungen zwischen gleichen Basen $B = (b_1, ..., b_n)$ einsehen, wenn man davon ausgeht, dass ein Vektor x in der Basis B dargestellt wird durch:

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k b_k$$

Dabei sind $x_k \in K$ Zahlen und $b_k \in V$ Basisvektoren! Auf diesen wendet man dann die lineare Abbildung f an und erhält:

$$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k b_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k f(b_k)$$

Damit erhält man die Matrixdarstellung:

$$A = {}_B M_B(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(b_1) & \cdots & f_1(b_n) \\ \vdots & & \vdots \\ f_n(b_1) & \cdots & f_n(b_n) \end{pmatrix}$$

Außerdem gilt:

- $\mathrm{Rang}(f) = \mathrm{Rang}(A)$
- Alle Rechenregeln für Homomorphismen übertragen sich auf Matrizen, also gilt (wenn die Matrixprodukte definiert sind!):

$$\begin{aligned} &A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2 \\ &(A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B \\ &a(AB) = (aA)B = A(aB), \quad a \in K \\ &A(BC) = (AB)C \end{aligned}$$

- Die identische Abbildung id wird durch die $n \times n$-Einheitsmatrix dargestellt:

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

- ***Beispiel:*** *Angenommen man möchte die lineare Abbildung $f : (x, y) \mapsto (3x - 2y, x + y)$ als Matrix darstellen. Die Darstellende Matrix ${}_B M_C(f)$ wird je nach Wahl der Basen B, C des Ausgangs und Zielraumes unterschiedliche Zahlen enthalten.*
  Allgemein stellt sich das Problem, dass sich die Abbildung unter Beibehaltung der Basis leicht ausrechnen lässt, man allerdings noch den Basiswechsel mit in die Basis integrieren möchte. Also rechnet man zuerst das Ergebnis in der Ausgangsbasis B aus und rechnet dann auf die neue Basis C um, stellt also $f(a_B)$ in der Basis C, also als Linearkombination von deren Basisvektoren $(c_i)_{n\in\mathbb{N}}$ dar.

  - *Für den einfachen Fall $B = C = \{(1,0), (0,1)\}$ gilt: ${}_B M_C(f) = {}_B M_B(f) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.*
    Im Fall $B = C$ wird die Koordinatenmatrix also einfach aus den Koeffizienten der Funktionsgleichungen von f gebildet.

– *Im Fall* $B = \{(1,0),(0,1)\}$ *und* $C = \{(3,1),(-2,1)\}$ *sind die Bilder von* $(0,1)$ *und* $(1,0)$ *gerade die gegebenen Basisvektoren von* C. *Also haben sie dort die Koordinatendarstellung* $(3,1)_B = (0,1)_C$ *bzw.* $(-2,1)_B = (1,0)_C$. *Damit ist die Koordinatenmatrix gleich der Einheitsmatrix:* ${}_BM_C(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

– *Nun gelte* $B = \{(5,8),(-1,1)\}$ *und* $C = \{(0,1),(1,1)\}$. *Zuerst berechnet man die Bilder der Basisvektoren von* B *in* B*:* $f(5,8) = (-1,13)$. *Danach sucht man Koeffizienten* α, β, *so dass* $(-1,13) = \alpha(0,1) + \beta(1,1)$. *Daraus ergibt sich dann:* ${}_BM_C(f) = \begin{pmatrix} 14 & -1 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$

2.3 Isomorphismen

- Seien V und W Vektorräume mit $\dim V = n$ und $\dim W = m$. Für eine lineare Abbildung $f : V \to W$ sind dann äquivalent:

  1. f ist **Isomorphismus** (also bijektiv).
  2. Es gilt: $m = n$ und $\text{Rang}(f) = n$.
  3. Eine Matrix $A \in K^{n,n}$ für welche die lin. Abbildung $A : K^n \to K^n$ eine Isomorphismus ist, nennt man *invertierbar*.

- **Basis-Isomorphismus:**

- **Übergangsmatrix:** Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum mit den Basen $B = (b_1, ..., b_n)$ und $B' = (b'_1, ..., b'_n)$, dann gilt:

$$b'_j = \sum_{i=1}^{n} s_{ij} b_i \quad j = 1, ..., n$$

  Die Matrix $S = (s_{pq})_{p,q}$ mit durch oben eindeutig bestimmten Elementen heißt Übergangsmatrix von B nach B': $T^B_{B'}$.
  Die Übergangsmatrix von B' nach B ist die Inverse S^{-1} zu S.
  Die Übergangsmatrix hat nach Definition folgende Eigenschaft:

$$v = x_1 b_1 + ... + x_2 b_n = y_1 b'_1 + ... + y_n b'_n$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{B'} = T^B_{B'} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_B$$

  Sie transformiert also die Koordinaten eines beliebigen Vektors in B, in diejenigen in B'.

  Merkregel: *Seien die Vektoren der Basis* C *als Linearkombination der Basisvektoren von* B *gegeben. Es gelte also:*

$$x_j = s_{1j} v_1 + ... + s_{nj} v_n.$$

  Dann gilt $T^B_{B'} = S^{-1}$, *wobei* $S = (s_{ij})$ *die Matrix mit den obigen Koeffizienten als Spalten ist. Damit ist die Lösung des Problems auf das finden der inversen Matrix zurückgeführt.*
  Als Beispiel betrachte man Den Übergang von der Basis $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ *zur Basis* $C =$

$\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. *Dabei sind die Vektoren aus* C *hier als Linearkombination der Vektoren aus* B, *also in der Basis* B *angegeben. Das kann man auch so schreiben:*

$$c_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man schon die Matrix

$$T_C^B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese übersetzt Koordinatenvektoren zur Basis C *in Koordinatenvektoren zur Basis* B. *Die eigentlich gesuchte Matrix ist aber* $T_B^C = (T_C^B)^{-1}$. *Man erhält sie durch Lösung des Gleichungssystems, das folgendermaßen gegeben ist:*

$$\begin{aligned} T_C^B \cdot T_B^C &= E_2 \\ \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Als Lösung erhält man:

$$T_B^C = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Für diese Matrix gilt etwa:

$$T_B^C \cdot c_1 = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- **Transformation der Koordinatenmatrix bei Basiswechsel:** Es sein V eine n-dimensionaler K-Vektorraum mit Basen B und B' und W ein m-dimensionaler K-Vektorraum mit Basen C und C'. A sei die Koordinatenmatrix einer lin. Abbildung $f : V \to W$ bzgl. B und C. Dann besitzt F bzgl. B' und C' die Koordinatenmatrix

  $$A' = TAS^{-1}$$

  wobei S die Übergangsmatrix von B nach B' und T die Übergangsmatrix von C nach C' bezeichnet.
  Für *Endomorphismen* $f : V \to V$ gilt analog:

  $$A' = SAS^{-1}$$

  Das folgende komutative Diagramm veranschaulicht den Basiswechsel:

$$\begin{tikzcd}
K^n \arrow[rrr, "M_C^B \equiv A"] \arrow[dr, "\Phi_B"] \arrow[dd, "S \equiv T_{B'}^B"'] & & & K^m \arrow[dl, "\Phi_C"'] \arrow[dd, "T_{C'}^C \equiv T"] \\
& V \arrow[r, "F"] & W & \\
K^n \arrow[rrr, "M_{C'}^{B'} \equiv A'"'] \arrow[ur, "\Phi_{B'}"'] & & & K^m \arrow[ul, "\Phi_{C'}"]
\end{tikzcd}$$

Basen B *(von* K^n*), bzw.* C *(von* K^m*)*

Basen B' *(von* K^n*), bzw.* C' *(von* K^m*)*

- **Äquivalenz von Matrizen:** Zwei $n \times m$-Matrizen A und A' heißen äquivalent, wenn es invertierbare Matrizen $S \in K^{n,n}$ und $T \in K^{m,m}$ gibt, so dass $A' = T^{-1}AS$ gilt. Man schreibt dann $A \sim A'$ (Äquivalenzrelation!).

- **Ähnlichkeit von Matrizen:** Zwei $n \times n$-Matrizen A und A' heißen ähnlich, wenn es eine invertierbare Matrix $S \in K^{n,n}$ gibt, so dass $A' = S^{-1}AS$ gilt. Man schreibt dann $A \approx A'$ (Äquivalenzrelation!).

- Es sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Für ein $f \in \mathrm{End}_K(V)$ sind äquivalent:
  1. $f : V \to V$ ist Isomorphismus.
  2. f ist invertierbar in $\mathrm{End}_K(V)$.
  3. Es gibt ein $g \in \mathrm{End}_K(V)$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_V$.
  4. Es gibt ein $h \in \mathrm{End}_K(V)$ mit $f \circ h = \mathrm{id}_V$.
  5. Es ist $f \neq 0$, und f ist kein Nullteiler in $\mathrm{End}_K(V)$.
  6. $\mathrm{Rang}\, f = n$.
  7. $f : V \to V$ ist surjektiv.
  8. $f : V \to V$ ist injektiv.
  9. $f : V \to V$ ist also bijektiv.

  analoges gilt für $n \times n$-Matrizen.

2.4 lineare Gruppe eines Vektorraumes

- Die Gruppe der invertierbaren Elemente im Endomorphismenring $\mathrm{End}_K(V)$ eines K-Vektorraumes V wird als lineare Gruppe $GL_K(V)$ bezeichnet und es gilt: $GL_K(V) := \mathrm{End}_K(V)^\times$ (siehe Einheiten eines Ringes). Für $n \times n$-Matrizenüber K heißt die lineare Gruppe $GL(n, K)$.
  (Es gilt: $A \in GL(n, K) \;\Rightarrow\; \det A \neq 0$)

- Die spezielle lineare Gruppe $SL(n, K)$ ist die Gruppe aller Matrizen $A \in M_n(K)$ mit $\det(A) = 1$.

KAPITEL 3

Determinanten

3.1 Definition und Grundeigenschaften

- *Definition:* Eine Abbildung $\det : K^{n,n} \to K$ heißt **Determinantenfunktion**, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

  D1 *Linearität in einer Zeile:* Für $i = 1, ..., n$ gilt also:

$$c_i = \alpha a_i + \beta b_i \quad \Rightarrow \quad \det \begin{pmatrix} \vdots \\ c_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \alpha \cdot \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} + \beta \cdot \det \begin{pmatrix} \vdots \\ b_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

  D2 det *ist alternierend:* Hat A zwei gleiche Zeilen, so gilt: $\det A = 0$.

  D3 *Normierung:* Für die Einheitsmatrix $E_n \in K^{n,n}$ gilt: $d(E_n) = 1$.

  Zu jeder Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau eine Determinantenfunktion. Sie wird mit $\det(A)$ bezeichnet, wobei $A \in K^{n,n}$.
  Eine Determinante hat folgende weitere Eigenschaften:

  D4 Für jedes $\lambda \in K$ gilt:

$$\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det A.$$

  D5 Ist eine Zeile von A gleich Null, so folgt: $\det A = 0$.

  D6 Entsteht B durch eine Zeilenvertauschung aus A, so ist $\det B = -\det A$.

  D7 Entsteht B durch addition des λ-fachen der i-ten Zeile zur j-ten, so gilt $\det B = \det A$

  D8 Ist A eine obere Dreiecksmatrix, so gilt:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot ... \cdot \lambda_n.$$

D9 Sei $n \geq 2$ und $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit quadratischen Matrizen A_1, A_2, so gilt:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} A_1 & C \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} = (\det A_1) \cdot (\det A_2).$$

D10 $\det A = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Rang}\, A < n$.

D11 Für alle $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gilt:

$$\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B).$$

D12 Für invertierbare Matrizen $A \in GL(n, K)$ gilt:

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

D13 *Symmetrie:*

$$\det(A) = \det({}^tA).$$

- **Entwicklung nach der n-ten Spalte:** Für jede Determinante einer $n \times n$-Matrix gilt:

$$\det(A) = |A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-j} a_{nj} \det(A_{nj})$$

  Wobei A_{ij} diejenige $(n-1) \times (n-1)$-Matrix beschreibt, die durch streichen der i-ten Spalte und j-ten Zeile entsteht. Als Merkhilfe für die Vorzeichen:

+	-	+	-	$\dots$
-	+	-	+	$\dots$
+	-	+	-	$\dots$
-	+	-	+	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

- **Determinantenkriterium für invertierbare Matrizen:** Eine Matrix $n \times n$-Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn $\det(A) \neq 0$.

3.2 Determinanten von Endomorphismen endlich dimensionaler Vektorräume

- **Definition:** Es sei V ein N-dimensionaler K-Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus von V. dann ist $\det(f) := \det(A)$, wobei A eine Koordinatenmatrix von f bzgl. einer Basis von V ist.

- **Spur einer Matrix:** Für jede quadratische $n \times n$-Matrix A ist ihre Spur, wie folgt definiert:

$$\text{Spur}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

  und es gilt:

  - $\text{Spur}(AB) = \text{Spur}(BA)$
  - $\text{Spur}(S^{-1}AS) = \text{Spur}(A)$, wobei $S \in GL(n, K)$ invertierbar.
  - $\text{Spur}(f) := \text{Spur}(A)$

KAPITEL 4

Eigenvektoren und charakteristisches Polynom

4.1 Eigenwert und Eigenvektor

- **Eigenvektor:** Es sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines K-Vektorraumes V. Ein Vektor $x \neq 0$ aus V heißt Eigenvektor von f, falls es eine Zahl $\lambda \in K$ gibt mit

$$fx = \lambda x$$

- **Eigenwert:** Es sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines K-Vektorraumes V. Eine Zahl $\lambda \in K$ heißt Eigenwert von f, falls es zu λ einen Vektor $x \neq 0$ aus V gibt, mit

$$fx = \lambda x$$

- **Eigenraum:** Ist λ ein Eigenwert von $f : V \to V$, so heißt der Teilraum

$$\mathrm{Eig}(\lambda, f) := \mathrm{Kern}(\lambda\,\mathrm{id}_V - f) = \{x \in V | fx = \lambda x\}$$

  von V, Eigenraum zum Eigenwert λ von f.
  Für jeden Eigenwert gilt: $\dim \mathrm{Eig}(\lambda, f) \leq \mathrm{ord}_\lambda(\chi_f)$.

- Es sei f ein Endomorphismus eines n-dimensionalen K-Vektorraumes V, und A sei die Koordinatenmatrix von f bezüglich einer basis von V. Es gilt:

$$\det(\lambda \cdot E_n - A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \in K \text{ ist Eigenwert von } f$$

- jedes System von Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten eines Endomorphismus f eines bel. K-Vektorraumes ist linear unabhängig.

4.2 charakteristisches Polynom

- Es sei $A \in M_n(K)$. Das **charakteristische Polynom** χ_A von A ist definiert als:

$$\chi_a(X) := \det(X \cdot E_n - A) \in K[X]$$

Das charakteristische Polynom eines Endomorphismuses f, dessen Koordinatenmatrix bzgl. einer Basis A ist, ist definiert als $\chi_f := \chi_A$.
Das charakteristische Polynom einer $n \times n$-Matrix A über K ist ein normiertes Polynom vom Grade n. Es gilt also: $\chi_A(X) = X^n + s_1 X^{n-1} + ... + s_{n-1}X + s_n$ mit wohlbestimmten Koeffizienten s_i.

- **Eigenwertkriterium:** Eine Zahl $\lambda \in K$ ist genau dann ein Eigenwert eines Endomorphismus f, wenn $\chi_f(\lambda) = 0$.
- **Kästchenform für das charakteristische Polynom:** Die quadratische Matrix $A \in M_n(K)$ habe die Gestalt
$$A = \left(\begin{array}{c|c} M & C \\ \hline 0 & M' \end{array}\right)$$
mit quadratischen Matrizen $M \in M_r(K)$ und $M' \in M_s(K)$, dann gilt: $\chi_A = \chi_M \cdot \chi_{M'}$.
- Die Eigenwerte λ ($\det(A - \lambda E_n) = 0$) von ähnlichen Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ($\exists S \in \mathbb{K}^{n\times n}$: $B = SAS^{-1}$) sind gleich:

$$\begin{aligned}
\det(B - \lambda' E_n) &= \\
&= \det(SAS^{-1} - \lambda' E_n) = \det(SAS^{-1} - \lambda' S E_n S^{-1}) = \det\big(S(A - \lambda' E_n)S^{-1}\big) = \\
&= \det S \cdot \det(A - \lambda' E_n) \cdot (\det S)^{-1} = \det(A - \lambda' E_n) \\
&\Rightarrow \lambda' = \lambda.
\end{aligned}$$

4.3 Diagonalisierbare Endomorphismen

- **Diagonalisierbarkeit:** Ein Endomorphismus f über einem n-dimensionalen K-Vektorraum V heißt diagonalisierbar, wenn es eine Basis von V gibt, bezüglich welcher die Koordinatenmatrix von f eine *Diagonalmatrix* ist, also folgende Gestalt hat:
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$
Dies entspricht der Aussage, dass V eine Basis besitzt, die nur aus Eigenvektoren besteht.
- Für jede diagonalisierbare Matrix mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_i \neq \lambda_j \;\; \forall i \neq j$ zerfällt das charakteristische Polynom vollständig in Linearfaktoren, hat also die Gestalt:
$$\chi_f(X) = \pm \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i).$$
Außerdem gilt:
$$V = \mathrm{Eig}(A, \lambda_1) \oplus ... \oplus \mathrm{Eig}(A, \lambda_n).$$
- Zu jedem unitären Endomorphismus gibt es eine unitäre Matrix S, mit
$${}^t\overline{S} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

wobei $\lambda_i \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda_i|$ EIgenwerte von A sind und S aus Eigenvektoren von A besteht.

- Für einen Endomorphismus f eines n-dimensionalen K-Vektorraumes sind folgende Aussagen äquivalent:

  1. f ist diagonalisierbar
  2. Das charakteristische Polynom χ_f von f zerfällt über K vollständig in Linearfaktoren und für jede Nullstelle λ von χ_f gilt:
  $$\text{ord}_\lambda(\chi_f) = \dim \text{Eig}(\lambda, f)$$
  3. Das Minimalpolynom μ_f von f zerfällt über K vollständig in Linearfaktoren und μ_f besitzt nur einfache Nullstellen.
  4. $V = \oplus_{i=1}^r \text{Eig}(\lambda_i, f)$
  5. $\dim V = \sum\limits_{i=1}^{r} \dim \text{Eig}(\lambda_i, f)$

4.4 Satz von CAYLEY-HAMILTON und Minimalpolynom

- **Satz von CAYLEY-HAMILTON:** Jeder Endomorphismus f eines n-dimensionalen K-Vektorraumes genügt seiner eigenen charakteristischen Gleichung:
$$\chi_f(f) = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \chi_A(A) = 0 \;\; \text{mit} A \in M_n(K)$$
- **Minimalpolynom:** Sei f ein Endomorphismus eines n-dimensionalen K-vektorraumes. Dann gibt es genau ein normiertes Polynom $\mu_f \in K[X]$ mit $\mu_f(f) = 0$ und folgender Eigenschaft:
Ist $g \in K[X]$ ein beliebiges Polynom mit $g(f) = 0$, so ist g durch μ_f teilbar.
Das Polynom μ_f heißt Minimalpolynom des Endomorphismus f.
Weiterhin gilt:
  - Das Minimalpolynom μ_f eines Endomorphismus f teilt also immer sein charakteristisches Polynom χ_f.
  - Die Polynome χ_f und μ_f eines Endomorphismus f haben die gleichen Nullstellen in K, allerdings gilt für jede Nullstelle λ: $\quad \text{ord}_\lambda(\mu_f) \leq \text{ord}_\lambda(\chi_f)$
- Ist $F \in \text{End}_K(V)$ und $n = \dim V$, so sind folgende Aussagen äquivalent:

  1. F ist nilpotent.
  2. $F^d = 0$ für ein d mit $1 \leq d \leq n$.
  3. $\mu_F(t) = \pm t^n$.
  4. Es gibt eine Basis B von V, so dass $M_B(F)$ die folgende Form hat:
  $$M_B(F) = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

4.5 Trigonalisierbare Endomorphismen

- **Trigonalisierbarkeit:** Ein Endomorphismus f über einem n-dimensionalen K-Vektorraum V heißt trigonalisierbar, wenn es eine Basis von V gibt, bezüglich welcher die Koordinatenmatrix von f eine obere Dreiecksmatrix ist, also folgende Gestalt hat:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

- Ein Endomorphismus f über einem n-dimensionalen K-Vektorraum V ist genau dann trigonalisierbar, wenn das charakteristische Polynom χ_f von f über K vollständig in Linearfaktoren zerfällt.

KAPITEL 5

Linearformen

Im folgenden Abschnit bezeichnet $\overline{z}$ das komplex-konjugierte der Zahl $z \in \mathbb{C}$ ($\overline{x+iy} := x - iy$).

5.1 Linearformen

- Eine Linearform ist eine Abbildung $f : K^n \to K$ mit den Eigenschaften ($v, w \in K^n$; $\lambda \in K$):

$$f(v+w) = f(v) + f(w) \qquad \text{und} \qquad f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)$$

- **Beispiel:** Auf dem $\mathbb{R}^3$ ist die Abbildung $f(\vec{x}) = x_1 + x_2 + x_3$ eine Linearform.
- **Kern einer Linearform:** Sei f eine Linearform über K^n, die nicht die Nullabbildung ist. Dann hat $\text{Kern}(f)$ die Dimension $n-1$.
- Die Menge aller Linearformen über einem Vektorraum V wird *Dualraum* genannt und mit V^* bezeichnet. Es gilt damit:

$$\dim(V) = \dim(V^*)$$

- Die Menge V^* ist bzgl. der folgenden Verknüpfungen ein K-Vektorraum:

$$(f+g)(v) := f(v) + g(v) \qquad (\lambda \cdot f)(v) := \lambda \cdot f(v)$$

- Die Räume V und V^{**} sind in natürlicher Weise isomorph.

5.2 Semilinearformen

- Ist V ein komplexer Vektorraum, so heißt die Abbildung $F : V \to V$ **semilinear**, wenn ($v, w \in V$; $\lambda \in \mathbb{C}$):

$$F(v+w) = F(v) + F(w) \qquad \text{und} \qquad F(\lambda \cdot v) = \overline{\lambda} \cdot F(v)$$

5.3 Bilinearformen

- **Definition:** Eine Bilinearform ist eine Abbildung $\beta : K^n \times K^n \to \mathbb{K}$, die bilinear ist, also folgende Eigenschaften aufweist ($v, v', w, w' \in K^n; \lambda \in K$):

  1. $\beta(v + v', w) = \beta(v, w) + \beta(v', w), \quad \beta(\lambda \cdot v, w) = \lambda \cdot \beta(v, w)$
  2. $\beta(v, w + w') = \beta(v, w) + \beta(v, w'), \quad \beta(v, \lambda \cdot w) = \lambda \cdot \beta(v, w)$

  man schreibt oft statt $\beta(v, w)$ auch $\langle v, w \rangle$.

- **Beispiel:** Eine Bilinearform kann durch eine Matrix $A = (a_{ij})$ vermittelt werden. Man nennt die Matrix dann *Struktur-* oder GRAM*'sche Matrix* der Bilinearform. Diese hat dann die Form:

$$\langle v, w \rangle_A = {}^t v \cdot A \cdot w = \sum_{i,j=1}^{n} v_i a_{ij} w_j$$

  Sei $(b_1, .., b_n)$ eine Basis des K^n. Dann gilt: $\langle b_i, b_j \rangle = a_{ij}$, also hat die darstellende Matrix von $\langle , \rangle$ die Form:

$$A = \begin{pmatrix} \langle b_1, b_1 \rangle & \cdots & \langle b_1, b_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle b_n, b_1 \rangle & \cdots & \langle b_n, b_n \rangle \end{pmatrix}$$

- die **Standardbilinearform** ist die durch die Einheitsmatrix E_n vermittelte Bilinearform:

$$\langle v, w \rangle =^t v \cdot E_n \cdot w = \sum_{i=1}^{n} v_i w_j$$

- Eine Bilinearform $\langle , \rangle$ heißt **nichtausgeartet**, falls nur der Nullvektor auf allen anderen Vektoen senkrecht steht, also

$$\langle v_0, w \rangle = 0 \ \forall w \in K^n \quad \Rightarrow \quad v_0 = 0.$$

- Eine Bilinearform $\langle , \rangle$ heißt **symmetrisch**, falls:

$$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle \quad \forall v, w \in K^n$$

  Eine durch eine Matrix A definierte Bilinearform ist genau dann **symmetrisch**, wenn A symmetrisch ist ($A = {}^t A$).
  Eine Bilinearform $\langle , \rangle$ heißt **schiefsymmetrisch/antisymmetrisch**, falls:

$$\langle v, w \rangle = - \langle w, v \rangle \quad \forall v, w \in K^n$$

- **Beziehung zwischen Bilinear- und Linearformen:** Sei $\langle , \rangle$eine Bilinearform und $z \in K^n$ ein fest gewählter Vektor. Dann sind die Abbildungen $f_z(w) := \langle z, w \rangle$ und $g_z(v) := \langle v, z \rangle$ Linearformen von K^n.

- **Bilinearformen unterscheiden sich nur durch eine lineare Abbildung:** Sei $\langle , \rangle$ eine nichtausgeartete Bilinearform und f eine lineare Abbildung über K^n. Dann gilt:

  1. Die Abbildung $[v, w] := \langle f(v), w \rangle$ ist eine Bilinearform.

2. Sei $[,]$ eine zweite Bilinearform über K^n. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung φ von K^n mit: $[v, w] = \langle\varphi(v), w\rangle$.
   φ ist bijektiv genau dann, wenn $[,]$ nicht ausgeartet ist.

- man nennt zwei Vektoren $v, w \in K^n$ **orthogonal** oder **senkrecht**, wenn $\langle v, w\rangle = 0$.
- Für eine beliebige Teilmenge $X \subset K^n$ definiert man das **othogonale Komplement zu** X, als die Menge der Vektoren, die auf allen Elementen von X orthogonal stehen:

$$X^{\perp} := \{v \in K^n | \langle x, v\rangle = 0 \quad \forall x \in X\}$$

  Ist $X \subset K^n$ ein Untervektorraum, so ist auch $X^{\perp}$ ein Untervektorraum.

- **Dimensionsformel für Bilinearformen:** Sei $\langle,\rangle$ Bilinearform von K^n. Ist $\langle,\rangle$ nicht ausgeartet, so gilt für Unterräume U von V:

$$\dim(U) + \dim(U^{\perp}) = n$$

- Für nichtausgeartete und symmetrische Bilinearformen gilt für jeden Unterraum U von K^n:

$$U^{\perp\perp} = U$$

- **Basiswechsel bei Bilinearformen:** Seien A, B Basen des K^n und T_A^B die Transformationsmatrix zwischen A und B. Seien weiter M_A und M_B die Strukturmatrizen einer Bilinearform auf K^n. Dann gilt:

$$M_B = {}^tT_B^A \cdot M_A \cdot T_B^A$$

  Für Endomorphismen $F : V \to V$ *gilt dagegen:*

$$M_B = (T_B^A)^{-1} \cdot M_A(F) \cdot T_B^A$$

5.4 Quadratische Formen

- Sei $\langle,\rangle$ eine symmetrische Bilinearform über $V = K^n$. Dann Definiert man durch

$$q : V \to K, \quad v \mapsto q(v) := \langle v, v\rangle$$

  eine *quadratische Form* mit der Eigenschaft $q(\lambda \cdot v) = \lambda^2 \cdot q(v)$

- **Polarisierung:** Ist $\mathrm{char}(K) \neq 2$, so gilt für jede symmetsiche Bilinearform s mit zugehöriger quadratischer Form q auf K^n:

$$s(v, w) = \frac{1}{2}\left(q(v + w) - q(v) - q(w)\right)$$

  Dies entspricht der sog. 1. Binomischen Formel: $(v + w)^2 = v^2 + 2vw + w^2$

5.5 Sesquilinearformen

- Ist V ein komplexer Vektorraum, so heißt die Abbildung $\beta : V \times V \to \mathbb{C}$ **Sesquilinearform**, wenn $(v, w, v', w' \in V; \quad \lambda \in \mathbb{C})$:

  S1 $\beta(v + v', w) = \beta(v, w) + \beta(v', w), \quad \beta(\lambda \cdot v, w) = \lambda \cdot \beta(v, w)$

  S2 $\beta(v, w + w') = \beta(v, w) + \beta(v, w'), \quad \beta(v, \lambda \cdot w) = \overline{\lambda} \cdot \beta(v, w)$

  β ist also im ersten Argument linear und im zweiten semilinear. Darum auch sesquilinear (=$1\frac{1}{2}$-fach linear).
  Man nennt eine Sesquilinearform **hermitesch**, wenn zusätzlich gilt:

  $$\beta(v, w) = \overline{\beta(w, v)}$$

- **Beispiel:** Das Standardskalarprodukt über $\mathbb{C}^n$ ist eine Sesquilinearform.

  $$\langle v, w \rangle_2 := \sum_{i=1}^{n} v_i \overline{w_i}$$

- **Polarisierung:** Im Komplexen gilt:

  $$s(v, w) = \frac{1}{4} \left(q(v + w) - q(v - w) + iq(v + iw) - iq(v - iw) \right)$$

- **Matrixdarstellung Basiswechsel:** Auch eine Sesquilinearform kann durch eine Matrix A dargestellt werden. Die Transformationsformel bei einem Basiswechsel von der Basis A zur Basis B lautet:

  $$M_B = {}^tT_B^A \cdot M_A \cdot \overline{T}_B^A.$$

- **Orthogonalität:** Der Begriff der Orthogonalität überträgt sich auch auf Sesquilinearformen. Zwei Vektoren $x, y \in V$ heißen also othogonal, wenn mit einer auf V definierten Sesquilinearform $\langle , \rangle$ gilt:

  $$\langle x, y \rangle = 0$$

KAPITEL 6

Euklidische und Unitäre Vektorräume, Skalarprodukte

6.1 Definitionen und Eigenschaften des Skalarproduktes

- Ein **Skalarprodukt** $\langle , \rangle$ eines reellen Vektorraumes $\mathbb{R}^n$ oder komplexe Vektorraumes $\mathbb{C}^n$ ist eine Sequilinearform (im Falle des $\mathbb{R}^n$ also eine Bilinearform) mit folgenden Eigenschaften:

  1. $\langle , \rangle$ ist *hermite'sch* (im $\mathbb{R}^n$ *symmetrisch*), also: $\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle} \quad \forall v, w \in K^n$
  2. $\langle , \rangle$ ist *positiv definit*, also: $\langle v, v\rangle \geq 0 \quad \forall v \in K^n$

  Ein Skalarprodukt ist also eine positiv definite, symmetrische Bilinearform bzw. hermite'sche Form.

- Das Paar $(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$ eines reellen Vektorraumes und eines Skalarproduktes wird **euklidischer Vektorraum** genannt.

- Das Paar $(\mathbb{C}^n, \langle , \rangle)$ eines komplexen Vektorraumes und einer hermite'schen Sesquilinearform wird **unitärer Vektorraum** genannt.

- **Konstruktion von Skalarprodukten:** Sei $\langle , \rangle$ eine symmetrische Bilinearform des reellen Vektorraumes $\mathbb{R}^n$ mit Strukturmatrix A. Dann gilt:
  Genau dann ist $\langle , \rangle$ ein Skalarprodukt, wenn für jedes $1 \leq k \leq n$ die linke obere $(k \times k)$-Teilmatrix $A^{(k)}$ von A eine Determinante $\det(A^{(k)}) > 0$ besitzt.

- Die Standardbilinearform eines reellen Vektorraumes ist ein Skalarprodukt.

- Das **euklidische Skalarprodukt** ist auf $\mathbb{K}^n$ definiert als

$$\langle v, w\rangle_2 := \sum_{i=1}^{n} v_i \overline{w_i}$$

- Sei V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle , \rangle$. Dann ist für jeden Unterraum U von V der Unterraum $U^\perp$ ein komplementärer Unterraum, also $U \cap U^\perp = \{0\}$ und $U + U^\perp = V$. Man nennt $U^\perp$ das **orthogonale Komplement** zu U.

- Eine symmetrische Bilinearform $\langle,\rangle$ von V ist genau dann ein Skalarprodukt, wenn es eine Orthonormalbasis B gibt, sodass die Strukturmatrix von $\langle,\rangle$ bezüglich B nur positive EIgenwerte besitzt.

6.2 Normen

- **Definition:** Eine **Norm** des euklidischen Vektorraumes $V = K^n$ ist eine Abbildung $\|\cdot\| : v \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften ($v, w \in V$; $\lambda \in K$):

  N1: $\|v\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = 0$.

  N2: $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$.

  N3: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$. (*Dreiecksungleichung*)

  Die **euklidische Norm** ist definiert als $\|v\|_{\text{euklid}} := \sqrt{\langle v, v\rangle}$ und ist eine Norm.

- **Ungleichung von CAUCHY-SCHWARZ:** Für $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

  Gleichheit gilt, wenn v und w linear abhängig sind.

- Sei V ein euklidischer Raum mit Skalarprodukt $\langle,\rangle$.
  Man nennt eine Menge von Vektoren $\{v_1, ..., v_n\} \subset V$ **orthogonal**, wenn $\langle v_i, v_j\rangle = 0 \quad \forall i \neq j$.
  Man nennt sie **orthonormal**, wenn zusätzlich $\|v_i\| = 1 \quad \forall 1 \leq i \leq n$ gilt.

- Eine Vektor v lässt sich auf natürliche Weise normieren:

$$v' := \frac{v}{\|v\|} \qquad \Rightarrow \|v'\| = 1$$

  Damit lässt sich aus jeder Menge orthogonaler Vektoren eine Menge orthonormaler Vektoren konstruieren. Insbesondere lässt sich jede Orthogonalbasis in eine Orthonormalbasis überführen.

- **Orthonormalisierungssatz von E. SCHMIDT:** Sei V ein reeller Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle,\rangle$. Dann hat V eine Orthonormalbasis

- **GRAM-SCHMIDT'sches Orthogonalisierungsverfahren:** Sei $\{a_1, ..., a_n\}$ eine Basis des $\mathbb{K}^n$. Dann erhält man durch

$$\begin{aligned}
b_1 &:= \frac{a_1}{\|a_1\|_2} \\
\tilde{b}_k &:= a_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle a_k, b_j\rangle_2 \, b_j, \qquad b_k := \frac{\tilde{b}_k}{\|\tilde{b}_k\|_2}, \qquad k = 2, ..., n
\end{aligned}$$

  eine Orthonormalbasis $\{b_1, ..., b_n\}$ des $\mathbb{K}^n$.

  Das Verfahren funktioniert folgendermaßen:
  Angenommen man hat bereits $k-1$ orthonormale Vektoren $b_1, ..., b_{k-1}$. Nach Konstruktion sind sie alle linear unabhängig vom k-ten Vektors a_k der gegebenen allgemeinen Basis. Für jeden Vektor b_j wird durch $\langle a_k, b_j\rangle_2 \cdot b_k$ die Projektion auf a_k, also der Anteil, der linear zu a_k ist berechnet. Dieser wird von a_k abgezogen. Damit ist a_k weiterhin linear unabhängig von $b_1, ..., b_{k-1}$ und steht jetzt noch zusätzlich senkrecht auf allen b_j. Danach wird nur noch normiert.

6.3 Orthogonale Abbildungen

- **Orthogonale/unitäre Abbildungen:** Ein Endomorphismus $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ über einem euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^n$ wird *orthogonal* genannt, wenn für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle$$

Auf einem unitären Vektorraum $\mathbb{C}^n$ heißt eine solche Abbildung *unitär. Das bedeutet, dass Abstände (gemessen z.B. durch $\sqrt{\langle v, w\rangle}$) invariant unter der Transformation f bleiben. Orthogonale bzw. unitäre Endomorphismen $F \in \mathrm{End}(V)$ über einem euklidischen bzw. unitären Vektorraum V haben folgenden weiteren Eigenschaften/Rechenregeln:*

1. $\|F(v)\| = \|v\| \quad \forall v \in V.$
2. $v \perp w \quad \Rightarrow \quad F(v) \perp F(w).$
3. F *ist Isomorphismus und* F^{-1} *ist orthogonal bzw. unitär.*
4. *Ist* $\lambda \in \mathbb{K}$ *Eigenwert von* F*, so ist* $|\lambda| = 1$.
   Eigenwerte orthogonaler/unitärer Matrizen sind immer ± 1.

Beispiel: *Drehungen im* $\mathbb{R}^2$ *sind orthogonal:*

$$D(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

- **orthogonale/unitäre Matrizen:**
Eine reelle invertierbare $n \times n$-Matrix $M \in GL(n, \mathbb{R})$ heißt *orthogonal*, falls:

$${}^tM = M^{-1} \qquad \Leftrightarrow \quad M \cdot {}^tM = E_n.$$

Eine komplexe invertierbare $n \times n$-Matrix $M \in GL(n, \mathbb{C})$ heißt *unitär*, falls:

$${}^t\overline{M} = M^{-1} \qquad \Leftrightarrow \quad M \cdot {}^t\overline{M} = E_n.$$

- Orthogonale bzw. unitäre Matrizen haben folgende Eigenschaften:

  – **Gruppeneigenschaften:** Die folgenden Mengen sind Untergruppen der Linearen Gruppe $GL(n, \mathbb{R})$, bzw. $GL(n, \mathbb{C})$:
    * *orthogonale Gruppe:* $O(n) := \left\{A \in GL(n, \mathbb{R}) \middle| A^{-1} = {}^tA\right\}$
    * *spezielle orthogonale Gruppe:* $SO(n) := \left\{A \in SO(n) \middle| \det A = 1\right\}$
    * *unitäre Gruppe:* $U(n) := \left\{A \in GL(n, \mathbb{C}) \middle| A^{-1} = {}^t\overline{A}\right\}$

  Das bedeutet: Sind A, B unitär/orthogonal, so sind auch AB und A^{-1}, B^{-1} unitär/orthgonal.

  Mit obiger Gruppeneigenschaft beweist man leicht folgenden ***Satz vom Fußball:***
  In jedem Fußballspiel, in dem nur genau ein Ball benutzt wird, gibt zu Anfang jeder Halbzeit (wenn der Ball auf dem Anstoßpunkt liegt) genau zwei Punkte auf dem Ball, die an der gleichen Stelle liegen.
  Beweis: Der Ball kann während des Spieles nur gedreht und translatiert werden. Die Translation ist hier uninteressant, da sie durch das Legen auf die Anstoßmarke ausgeglichen wird. Alle Drehungen $D_1, ..., D_k \in SO(3)$ *sind aber Elemente der speziellen*

Orthogonalen Gruppe. Damit lassen sich alle k in einer Spielhälfte ausgeführten Drehungen durch Hintereinanderausführung mit einer einzigen Drehung $D_1 \cdot \ldots \cdot D_k$ beschreiben. Diese ist wegen der Untergruppeneigenschaft von $SO(3)$ wieder Element von $SO(3)$. Also gibt es zwei Punkte (die Durchstoßpunkte der Drehachse), die an der selben Stelle im Raum liegen. QED!

– **Spalten-/Zeilenvektoren:** Die Spalten- und Zeilenvektoren einer unitären bzw. orthogonalen Matrix bilden eine Orthonormalbasis des $\mathbb{C}^n$ bzw. $\mathbb{R}^n$.

– **Determinanten:**
Jede orthogonale oder unitäre Matrix M hat die Determinante $\det(M) = \pm 1$.
Gilt für orthogonales M: $\det M = 1$, so nennt man M *eigentlich orthogonal*. Das bedeutet, dass nicht nur Abstände unter der Abbildung M erhalten bleiben, sondern auch die Orientierung (die schließt Spiegelungen aus!)

- **Darstellung orthogonaler/unitärer Abbildungen:** Sei V ein euklidischer/unitärer Vektorraum und sei B eine Orthonormalbasis von V. Sei weiter $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. Dann gilt:

  f ist orthogonal/unitär $\Leftrightarrow$ die Darstellungsmatrix ${}_BM_B(f)$ ist eine orthogonale/unitäre Matrix.

- **zweidimensionale orthogonale Abbildungen:** Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^2$. Dann gibt es eine Orthonormalbasis B von $\mathbb{R}^2$, bezüglich der die Darstellungsmatrix ${}_BM_B(f)$ eine der folgenden Gestalten hat:

  1. *Drehung:* ${}_BM_B(f) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$
  2. *Spiegelung:* ${}_BM_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

- **Diagonalisierbarkeit unitärer Endomorphismen:** Jeder unitäre Endomorphismus F eines unitären Vektorraumes besitzt eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von F. Insbesondere ist er diagonalisierbar.
  Korollar: Zu einer unitären Matrix $A \in U(n)$ gibt es eine unitäre Matris $S \in U(n)$ mit:

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = {}^t\overline{S} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

  Dabei gilt: $\lambda_i \in \mathbb{C}$ und $|\lambda_i| = 1$.

- **Eigenwerte:** Sei $f : V \to V$ eine orthogonale Abbildung des euklidischen Vektorraumes V. Dann hat f höchstens die Eigenwerte 1 und -1. Insbesondere ist f eine umkehrbare lineare Abbildung, und f^{-1} ist ebenfalls eine orthogonale Abbildung.

- **HERMITE'sche Matrizen:** Eine Matrix $A = (a_{ij})$ heißt **hermitesch**, wenn

$${}^tA = \overline{A}$$

  . Dabei bezeichnet $\overline{A}$ das komplex-konjugierte der Maztrix A, d.h. alle Matrixelemente a_{ij} werden komplex-konjugiert.

- **HERMITE'sche Matrizen und euklidisches Skalarprodukt:** Für hermite'sche Matrizen $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $\quad A = {}^t\overline{A}$ gilt mit dem euklidischen Skalarprodukt:

$$\langle Ax, y\rangle_2 = \overline{\langle x, Ay\rangle_2}$$

- **Unitäre Matrizen und euklidisches Skalarprodukt:** Für unitäre Matrizen $Q \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $\quad {}^t\overline{Q}Q = E_n \;\Rightarrow\; Q^{-1} = {}^t\overline{Q}$ gilt:

$$\langle Qx, Qy\rangle_2 = \langle x, y\rangle_2\,, \qquad x, y \in \mathbb{K}^n$$

KAPITEL 7

Lineare Gleichungssysteme

In diesem Abschnitt werden Gleichungssysteme der Form

$$A \cdot x = b$$

betrachtet, wobei $x, b \in K^n$ und die *Koeffizientenmatrix* A eine $n \times n$-Matrix ist. Gesucht ist die Menge aller x, die die obige Gleichung für festes A und b erfüllt. Gilt $b = 0$, so nennt man das Gleichungssystem *homogen*, sonst *inhomogen*.

Die Lösung des inhomogenen Problems lässt sich allgemein auf das invertieren der Matrix A zurückfhren, denn aus dem oben gesagten folgt $x = A^{-1} \cdot b$.

- **CRAMER'sche Regel für lineare Gleichungssysteme:** Es sei ein lineares Gleichungssystem $A \cdot x = b$ von n Gleichungen in n unbekannten vorgelegt. Seine (einfache) Koeffizientenmatrix A sei invertierbar. Dann besitzt dieses System genau eine Lösung x. Bezeichnet man mit $a_1, ..., a_n$ der Reihe nach die Spalten von $A = (a_1, ..., a_n)$, so gilt:

  $$\forall 1 \leq i \leq n : \qquad x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)} = \frac{\det(a_1, ..., b, ..., a_n)}{\det(A)}$$

  dabei ist $A_i = (a_1, ..., b, ..., a_n)$ die Matrix, die aus A durch das ersetzen der i-ten Spalte durch b hervorgeht.

- Für eine $n \times n$-Matrix A über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R},$ oder $\mathbb{C}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

  1. A ist invertierbar.
  2. $Ax = b$ ist für jedes $b \in \mathbb{K}^n$ eindeutig lösbar.
  3. $Ax = 0$ ist nur für $x = 0$ lösbar.
  4. $\text{Rang}(A) = n$.
  5. $\det(A) \neq 0$.
  6. Alle Eigenwerte von A sind ungleich Null.