Stoffzusammenfassung: Statistik und Stochastik

Jan Krieger

18. Januar 2005

.

'The time has come,' the Walrus said,
    'To talk of many things:
Of shoes – and ships – and sealingwax –
    Of cabbages – and kings –
And why the sea is boiling hot –
    And whether pigs have wings.'

– Tweedldee in *Through the Looking-Glass* by Lewis Carrol

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Stochastik

1.1 Übersicht

Bezeichnung	Formel	Beispiel	Entnahme aus Urne	Verteilen auf Urnen
Permutation ohne Wiederholung	$P_{\text{oW}}(n) = n!$	Anzahl der Sitzordnungen in einer Klasse von n Schülern	Urne enthält n nummerierte Kugeln. Es werden der Reihe nach *alle* Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.	n verschiedene Kugeln sollen auf n Urnen verteilt werden (in jeder Urne liegt genau eine Kugel)
Permutation mit Wiederholung	$P_{\text{mW}}(n) = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_p!}$	Anzahl der möglichen Wörter, die man aus den Buchstaben des Wortes `MISSISSIPPI` bilden kann.	Urne enthält n Kugeln von denen jeweils $n_1, n_2, ..., n_p$ gleich markiert sind. Es werden der Reihe nach *alle* Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.	Gegeben sind n unterscheidbare Kugeln und p Urnen. Es sollen n_1 Kugeln in Urne 1, ..., n_p Kugeln in Urne p kommen.
Variationn ohne Wiederholung	$V_{\text{oW}}(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$	Anzahl der möglichen k-ziffrigen Zahlen, die sich aus n möglichen Ziffern bilden lassen, wenn jede Ziffer nur einmal vorkommen darf.	Urne enthält n verschiedene Kugeln. Man zieht nacheinander k Kugeln ohne Zurücklegen.	k unterscheidbare Kugeln sollen auf n Urnen verteil werden ($k \leq n$). In jede Urne kommt höchstens eine Kugel.

Bezeichnung	Formel	Beispiel	Entnahme aus Urne	Verteilen auf Urnen
Variation mit Wiederholung	$V_{\mathrm{mW}}(n,k) = n^k$	Anzahl der k-ziffrigen Zahlen, die sich aus n möglichen Ziffern bilden lassen, wenn Wiederholungen erlaubt sind.	Urne enthält n verschiedene Kugeln. Man zieht nacheinander k Kugeln, mit Zurücklegen.	k unterscheidbare Kugeln sollen auf n Urnen verteilt werden. Jede Urne darf beliebig viele Kugeln aufnehmen **Maxwell-Boltzmann-Statistik**
Kombination ohne Wiederholung	$K_{\mathrm{oW}}(n,k) = \binom{n}{k}$	Lotto '6 aus 49', bzw. Anzahl der Teilmengen der Mächtigkeit K aus einer Menge der Mächtigkeit n.	Urne enthält n verschiedene Kugeln. Man zieht k Kugel gleichzeitig, bzw. zieht nacheinander k Kugeln ohne Zurücklegen, interessiert sich aber nicht für die Reihenfolge.	k ununterscheidbare Kugeln werden auf n Urnen so verteilt, dass in keine Urne mehr als eine Kugel kommt. **Fermi-Dirac-Statistik**
Kombination mit Wiederholung	$K_{\mathrm{mW}}(n,k) = \binom{n+k-1}{k}$	4 Würfel werden gleichzeitig geworfen. $K_{\mathrm{mW}}(n = 6, k = 4)$ gibt die Anzahl der möglichen Zahlenkombinationen	Urne enthält n verschiedene Kugeln. Man zieht k Kugeln nacheinander mit Zurücklegen, interessiert sich aber nicht für die Reihenfolge	k ununterscheidbare Kugeln werden auf n Urnen verteilt. In eine Urne dürfen beliebig viele dieser k Kugeln (auch 0) kommen. **Bose-Einstein-Statistik**

Kapitel 2

Statistik

2.1 Wahrscheinlichkeitsmaße

- **Grundgesamtheit, Elementarereignis, Ereignis:** Ω bezeichnet die Menge aller möglichen Versuchsausgänge. Ein beliebige Element $\omega \in \Omega$ bezeichnet man als *Elementarereignis.* Eine Menge $A \subset \Omega$ von Elementarereignissen bezeichnet man als *Ereignis.*

- **Axiome von Kolmogorow:** Jedem Ereignis $A \subset \Omega$ wird eine Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(A) \in \mathbb{R}$ zugeordnet. Für eine solche Wahrscheinlichkeitsfunktion $\mathbb{P} : \Omega \to \mathbb{R}$ müssen die *Axiome von Kolmogorow* erfüllt sein:

  1. $\mathbb{P}(A) \geq 0$
  2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
  3. $\mathbb{P}(\bigcup\limits_i A_i) = \sum\limits_i P(A_i)$, für disjunkte Ereignisse $A_i \subset \Omega$ (also: $A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j$).

- **Verknüpfung von Ereignissen:** Seien $A, B \in \Omega$ zwei Ereignisse. Dann bezeichnet:

  - $A \cup B$: Ereignis A *oder* Ereignis B treten ein.
  - $A \cap B$: Ereignis A *und* Ereignis B treten (gleichzeitig) ein.
  - $\overline{A}$: Das Ereignis A tritt nicht ein (das Komplement/Gegenereignis tritt ein).

- **Laplace-Ansatz:** Der Ansatz:

$$\mathbb{P}(A) := \frac{\text{Anzahl günstige Ereignisse}}{\text{Anzahl mögliche Ereignisse}} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

  stellt eine Wahrscheinlichkeit im obigen Kolmogorov'schen Sinne dar.

- **Satz von Sylvester:** Dieser Satz gibt an, wie sich die Wahrscheinlichkeit von Vereinigungen nicht-disjunkter Ereignisse E_i berechnet:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(E_i \cap E_j) + \sum_{i<j<k} \mathbb{P}(E_i \cap E_j \cap E_k) - ... + (-1)^{n-1}\mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_n)$$

  Spezialfall für $n = 2$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E_1 \cup E_2) &= \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) - \mathbb{P}(E_1 \cap E_2) \\ &= \mathbb{P}(E_1 \backslash E_2) + \mathbb{P}(E_2 \backslash E_1) + \mathbb{P}(E_1 \cap E_2) \end{aligned}$$

2.2 bedingte Wahrschenlichkeit

- **bedingte Wahrscheinlichkeiten:** Seien $E, B \in \Omega$ Ereignisse. Wird dann das Eintreten von E durch das Eintreten von B bedingt, kann also E nur eintreten, wenn B erfüllt ist, so gilt:

$$\mathbb{P}_B(E) \equiv \mathbb{P}(E|B) = \frac{\mathbb{P}(E \cap B)}{\mathbb{P}(B)}, \qquad \text{mit } \mathbb{P}(B) \neq 0$$

und heißt *bedingte Wahrscheinlichkeit* von E unter der Bedingung B. Es gilt:

  – Sei $\{B_1, ..., B_n\}$ eine disjunkte Zerlegung von Ω und $A \in \Omega$ ein Ereignis. Dann gilt:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{B_i}(A) \cdot \mathbb{P}(B_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap B_i)$$

Beispiel: Zweimaliges Werfen eines W6 (Bernoulli-Experiment, mit $p = \frac{1}{6}$ und unabhängigen Würfen.

$$B := \text{„Eine 6 im ersten Wurf"}$$
$$E := \text{„Eine 6 im zweiten Wurf"}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(B \cap E) = \mathbb{P}(\text{„Eine 6 im ersten und im zweiten Wurf"}) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(E) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Die letzte Beziehung gilt aufgrund der stat. Unabhängigkeit der Würfe. Nun ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, beim zweiten Wurf eine 6 zu würfeln, falls im ersten Wurf bereits eine 6 gewürfelt wurde zu:

$$\mathbb{P}_B(E) = \frac{\mathbb{P}(B \cap E)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1}{6}.$$

Dies entspricht auch der Erwartung, weil die Wahrscheinlichkeit für den zweiten Wurf nicht von der für den ersten Wurf abhängen darf, da sonst das Spiel nicht fair wäre.

- **Formel von Bayes**: Bilden E_i mit $\mathbb{P}(E_i) \neq 0 \;\; \forall 0 < i \leq n$ eine (disjunkte) Zerlegung von Ω, so gilt:

$$\mathbb{P}_B(E_i) = \frac{\mathbb{P}_{E_i}(B) \cdot \mathbb{P}(E_i)}{\mathbb{P}_{E_1}(B) \cdot \mathbb{P}(E_1) + ... + \mathbb{P}_{E_n}(B) \cdot \mathbb{P}(E_n)}$$

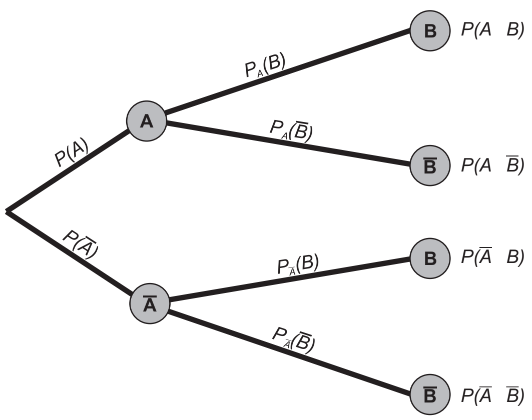
Sonderfall für $n = 2$:

$$\mathbb{P}_B(E) = \frac{\mathbb{P}_E(B) \cdot \mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}_E(B) \cdot \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}_{\overline{E}}(B) \cdot \mathbb{P}(\overline{E})}$$

- **statistische Unabhängigkeit:** Zwei Ereignisse A und B heißen *statistisch unabhängig*, wenn

$$\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B) \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

- **Wahrschenlichkeitsbäume:** In einem Wahrschenlichkeitsbaum stellt sich die bedingte Wahrschenlichkeit anschaulich folgendermaßen dar:



Im gezeichneten Baum wird ein Experiment durchgeführt (z.B. Würfelwurf), bei dem im ersten Versuch das Ereignis A eintreten kann, oder nicht (z.B. $A = \{\text{Augenzahl gerade}\}$. Danach wird ein weiterer Versuch durchgeführt und auf das Ereignis B hin ausgewertet (z.B. $B = \{\text{Augenzahl 6}\}$).

Für solche Wahrscheinlichkeitsbäume gilt allgemein:

1. Jeder *Knoten* repräsentiert ein Ereignis. Die *Kanten* tragen die Wahrscheinlichkeit, dass das folgende Ereignis eintritt.
2. Die Summe der Wahrscheinlichkeiten p_i aller n von einem Knoten ausgehenden Kanten muss 1 ergeben:
$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$
3. Die Wahrschenlichkeiten entlang eines Pfades durch den Baum werden multipliziert:
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}_A(B)$$
4. Die Wahrscheinlichkeiten mehrerer Pfade können addiert werden. Also ist die Summe aller Pfade in einem Baum wieder eins. Im obigen Beispiel ergibt sich etwa die Wahrschenlichkeit für das Eintreten des Ereignisses B zu:
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$$

2.3 Zufallsexperimente

- **Bernoullie-Experiment(e):** Ein Bernoulli-Experiment ist ein zufälliges Experiment, dass mit Wahrscheilichkeit p einen Treffer und Wahrscheinlichkeit $1-p$ eine Niete liefert. Nur diese beiden Ausgänge sind möglich.
Eine Bernoulli-Kette ist eine Reihe voneinander (stochastisch) unabhängiger Bernoulli-Experimente.

2.4 Zufallsvariablen

- Eine Funktion
$$\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}, \omega \mapsto x_\omega$$
die jedem möglichen Ereignis $\mathbf{X}$ eine Zahl x_ω zuordnet wird als *Zufallsvariable* oder *stochastische Variable* bezeichnet, falls sie folgende Bedingungen erfüllt:

  1. für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $A_\lambda := \left\{\omega \middle| \mathbf{X}(\omega) \leq \lambda\right\}$ ein Ereignis, also $A_\lambda \subset \Omega$
  2. $\mathbb{P}\left(\left\{\omega \middle| \mathbf{X}(\omega) = \infty\right\}\right) = 0 = \mathbb{P}\left(\left\{\omega \middle| \mathbf{X}(\omega) = -\infty\right\}\right)$

  Damit lässt sich also der Ausgang eines realen Experimentes mit Messwerten o.ä. modellieren.

- **Verteilungsfunktion:** Sei $\mathbf{X}$ ein Zufallsvariable. Ihre Wahrscheinlichkeitsfunktion $W(\lambda)$ gibt dann gerade die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(\mathbf{X} \leq \lambda)$ an:
$$W(\lambda) = \mathbb{P}(\mathbf{X} \leq \lambda).$$
Für Verteilungsfunktionen $W(\lambda)$ gilt:

  1. $W(\lambda)$ ist monoton steigend, als $W(\lambda_1) \leq W(\lambda_2)$ für $\lambda_1 \leq \lambda_2$

2. $W(-\infty) = 0; \qquad W(\infty) = 1$
3. $\mathbb{P}(\mathbf{X} > \lambda) = 1 - W(\lambda); \qquad \mathbb{P}(a \leq \mathbf{X} \leq b) = W(b) - W(a)$

- **Wahrscheinlichkeitsdichte:** Sei $\mathbf{X}$ eine Zufallsvariable und $W_{\mathbf{X}}(\lambda)$ ihre Wahrscheinlichkeitsfunktion. Dann bezeichnet man eine Funktion $w(x) \geq 0$ als *Wahrscheinlichkeitsdichte*, falls:

$$W_{\mathbf{X}}(\lambda) = \mathbb{P}(\mathbf{X} < \lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\lambda} w(x)\,dx$$

Für Wahrscheinlichkeitsdichten gilt die Normierungsbedingung:

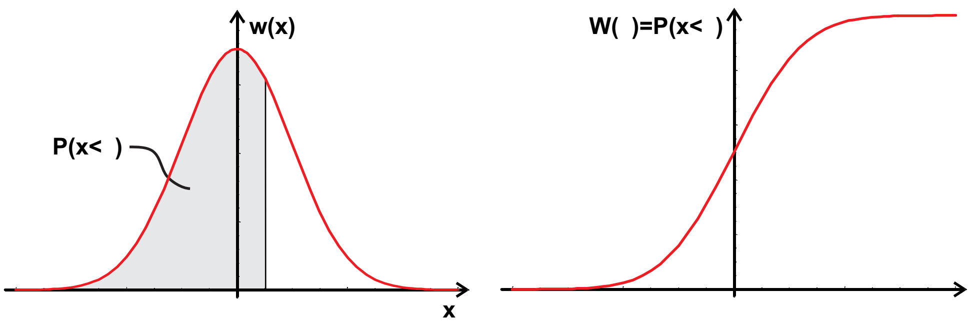
$$\mathbb{P}(-\infty \leq \mathbf{X} \leq \infty) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} w(x)\,dx = 1$$

Bei diskreten Verteilungen $\{p_1, ..., p_n\} \subset [0,1]$ (wobei $\mathbb{P}(x_i) = p_i$ die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von x_i ist) gehen die Integrale in Summen über:

$$W_{\mathbf{X}}(\lambda) = \mathbb{P}(\mathbf{X} < \lambda) = \sum_{\{i:\ x_i < \lambda\}} p_i \qquad\qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Man kann dann die Wahrscheinlichkeitsdichte formal durch δ-Funktionen ausdrücken:

$$w(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \delta(x - x_i).$$



2.5 Charakterisierung von Verteilungen

- **Erwartungswert:** Sei $\mathbf{X}$ eine diskrete Zufallsgröße mit $p_i = \mathbb{P}(\mathbf{X} = x_i); \quad i \in \mathbb{N}$, bzw. eine kontinuierliche Zufallsgröße mit Dichte $w(x)$. Dann ist der Erwartungswert definiert als:

$$\mathbb{E}\mathbf{X} = \sum_i x_i \cdot p_i \qquad \text{bzw.} \qquad \mathbb{E}\mathbf{X} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot w(x)\,dx$$

Der Erwartungswert $\mathbb{E}\mathbf{X}$ gibt das erwartete, mittlere Ergebnis bei mehreren Realisierungen/Messungen von $\mathbf{X}$ an.
Es gilt (es sei λ eine Konstante):

1. $\mathbb{E}\lambda = \lambda$.
2. $\mathbb{E}(\lambda \cdot \mathbf{X}) = \lambda \cdot \mathbb{E}\mathbf{X}$

3. $\mathbb{E}(\lambda + \mathbf{X}) = \lambda + \mathbb{E}\mathbf{X}$
4. Für kontinuierlich verteilte, positive $\mathbf{X} \geq 0$ mit Verteilungsfunktion $W(x) = \mathbb{P}(\mathbf{X} < x)$ gilt außerdem: $\mathbb{E}\mathbf{X} = \int\limits_0^\infty (1 - W(x))\, dx$

- **Varianz:** Sei $\mathbf{X}$ eine diskrete Zufallsgröße mit $p_i = \mathbb{P}(\mathbf{X} = x_i)$; $i \in \mathbb{N}$, bzw. eine kontinuierliche Zufallsgröße mit Dichte $w(x)$. Weiter sei $\mathbb{E}\mathbf{X}$ der Mittelwert von $\mathbf{X}$. Dann ist die Varianz definiert als:

$$\operatorname{var}\mathbf{X} = \sum_i (x_i - \mathbb{E}\mathbf{X})^2 \cdot p_i \qquad \text{bzw.} \qquad \operatorname{var}\mathbf{X} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}\mathbf{X})^2 \cdot w(x)\, dx$$

Die Varianz gibt die mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert einer Zufallsgröße an. Es gilt (es sei λ eine Konstante):

1. $\operatorname{var}\mathbf{X} = \mathbb{E}\mathbf{X}^2 - (\mathbb{E}\mathbf{X})^2$
2. $\operatorname{var}(\lambda \cdot \mathbf{X}) = \lambda^2 \cdot \operatorname{var}\mathbf{X}$
3. $\operatorname{var}(\lambda + \mathbf{X}) = \operatorname{var}\mathbf{X}$

- **Höhere Momente der Verteilung:** Sei $\mathbf{X}$ eine diskrete Zufallsgröße mit $p_i = \mathbb{P}(\mathbf{X} = x_i)$; $i \in \mathbb{N}$, bzw. eine kontinuierliche Zufallsgröße mit Dichte $w(x)$. Man bezeichnet als *n-tes Moment der Verteilung* die Größe:

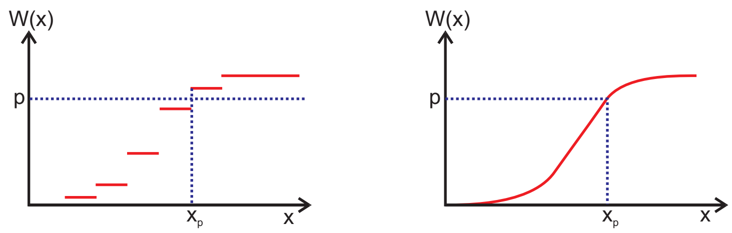
$$\mu_n = \langle X^n \rangle = \mathbb{E}(X^n) = \int\limits_\Omega x^n w(x)\, dx$$

- **Quantile:** Sei $\mathbf{X}$ eine Zufallsgröße. Das α-Quantil x_α ist das kleinste x für das gilt $\mathbb{P}(\mathbf{X} < x_\alpha) \geq \alpha$:

$$x_\alpha := \min\{x : \mathbb{P}(\mathbf{X} < x) \geq \alpha\}.$$

Für kontinuierliche/stetige Verteilungen, mit Verteilungsfunktion $W(x)$ gilt:

$$W(x_\alpha) = \alpha.$$



Das $\frac{1}{2}$-Quantil $x_{\frac{1}{2}}$ ist besonders wichtib und wird als *Median* bezeichnet. *Die Quantile stellen eine Art Umkehrfunktion der Verteilungsfunktion dar. Unterhalb des p-Quantils x_p kann man aksi $p \cdot 100\%$ der Werte von $\mathbf{X}$ erwarten. $x_{0.5}$ gibt den theoretischen Median der Verteilung an. Für symmetrische Dichtefunktionen $w(x)$ von kontinuierlich verteilten $\mathbf{X}$ gilt $x_{0.5} = \mathbb{E}\mathbf{X}$*

- **Charakteristische Funktion:** Sei $\mathbf{X}$ eine kontinuierliche Zufallsgröße mit Dichte $w(x)$. Dann heißt ihre Fourier-Transformierte auch *charakteristische Funktion der Verteilung:*

$$\mathbb{C}(u) = \langle \exp(iu\mathbf{X}) \rangle = \int\limits_\Omega \exp(iux) w(x)\, dx.$$

Die charakteristische Funktion hat folgende Eigenschaften:

– Falls alle Momente der Zufallsgröße $\mathbf{X}$ existieren, so gilt:

$$\mathbb{C}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} u^n \langle \mathbf{X}^n \rangle .$$

– Durch Differenzieren der charakteristischen Funktion erhält man alle Momente:

$$\langle \mathbf{X}^n \rangle = i^n \cdot \frac{d^n \mathbb{C}(u)}{du^n}$$

- **Erzeugende Funktion:** Sei $\mathbf{X}$ eine diskrete Zufallsgröße mit $p_i = \mathbb{P}(\mathbf{X} = x_i); \quad i \in \mathbb{N}$. Dann definiert man statt der charakteristische Funktion die *erzeugende Funktion:*

$$\mathbb{F}(z) = \langle z^n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} p_n u^n \qquad \text{für } z \in \mathbb{C}, \text{ mit } |z| \leq 1.$$

2.6 Addition von Zufallsgrößen

Es seien $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ zwei (nicht notwendigerweise unabhängige) Zufallsvariablen. Ihre Summe sei dann definiert als

$$\mathbf{X} := \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2.$$

Für diese neue Zufallsvariable $\mathbf{X}$ gilt dann:

1. $\mathbb{E}\mathbf{X} = \mathbb{E}\mathbf{X}_1 + \mathbb{E}\mathbf{X}_2$
2. $\operatorname{var} \mathbf{X} = \operatorname{var} \mathbf{X}_1 + \operatorname{var} \mathbf{X}_2 + \operatorname{cov}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$
   Dabei ist $\operatorname{cov}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$ die sog. **Kovarianz**:

$$\operatorname{cov}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \mathbb{E}\left[(\mathbf{X}_1 + \mathbb{E}\mathbf{X}_1) \cdot (\mathbf{X}_2 + \mathbb{E}\mathbf{X}_2)\right] = \mathbb{E}(\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2) - \mathbb{E}\mathbf{X}_1 \cdot \mathbb{E}\mathbf{X}_2.$$

   Für unabhängige Variablen $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ gilt $\boxed{\operatorname{cov}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = 0}$ und $\boxed{\mathbb{E}(\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2) = \mathbb{E}\mathbf{X}_1 \cdot \mathbb{E}\mathbf{X}_2}$.

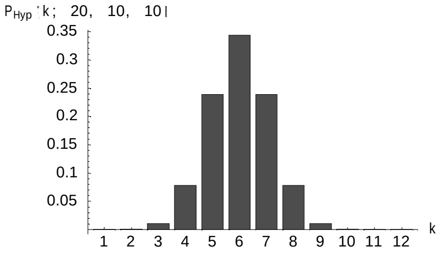
2.7 Einige Verteilungsfunktionen

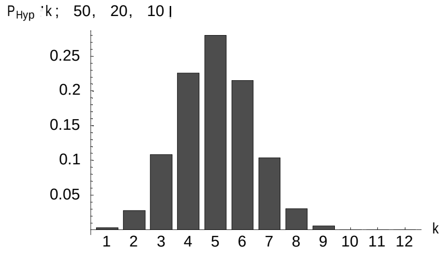
2.7.1 Hypergeometrische Verteilung

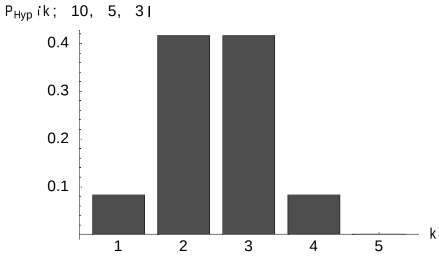
- **Definition:**

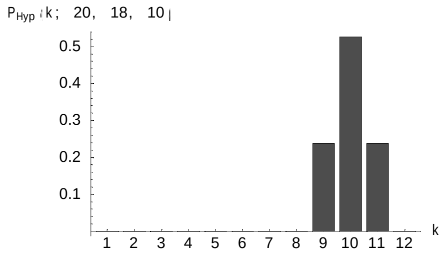
$$\mathbb{P}_{\text{Hyp}}(k; N, K, n) = W(k) = \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \qquad k = 0, 1, ..., n$$

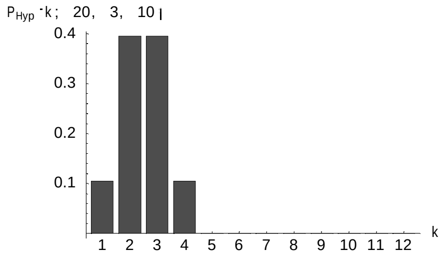
  Die *hypergeometrische Verteilung* geht von einer Grundgesamtheit von N Elementen aus, von denen K markiert sind. Sie gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, in einer Stichprobe von n Elementen genau k markierte Elemente zu finden.







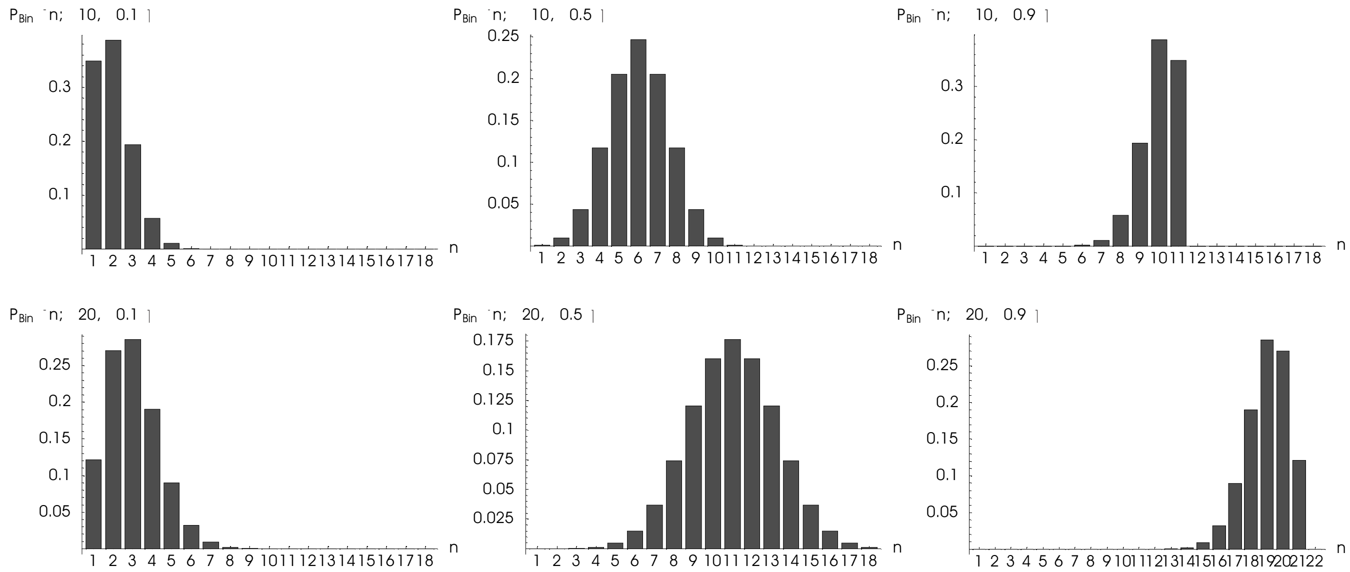




- **Capture-Recapture-Methode:** In einem Teich befinden sich N Fische (N *ist unbekannt*). Nun fängt man K Fische, markiert diese und entlässt sie wieder in den Teich. Bei einer Erneuten Stichprobe fängt man dann n Fische und hat darunter x markierte. Für dieses Experiment gilt die hypergeometrische Verteilung.
  Nun tabelliert man $\mathbb{P}_{\text{Hyp}}(x; N, K, n)$ für verschiedene N und nimmt den Wert als Schätzer, für den diese Wahrscheinlichkeit maximal ist. So kann man die Größe der Grundgesamtheit N bestimmen

2.7.2 Binomialverteilung

- **Definition:**
$$\mathbb{P}_{\text{bin}}(n; N, p) = W(n) = \binom{N}{n} \cdot p^n \cdot (1-p)^{N-n}$$
  $\mathbb{P}_{\text{bin}}(n; N, p)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, in N Bernoulli-Experimenten mit jeweils der Wahrscheinlichkeit p genau n Treffer zu erhalten.
  $p^n \cdot (1-p)^{N-n}$ *gibt die Wahrscheinlichkeit n Treffer und $N-n$ Nieten zu ziehen; es wird aber nicht berücksichtigt, dass es mehrere Möglichkeiten gibt dieses Ereignis zu realisieren.* $\binom{N}{n}$ *gibt die Anzahl der Möglichkeiten, genau n Treffer in N Versuchen zu haben und vervollständigt damit die Formel.*



- **Mittelwert und Varianz:** Der Mittelwert $\overline{n}$ und die Varianz σ^2 über N Versuche ergeben sich zu:

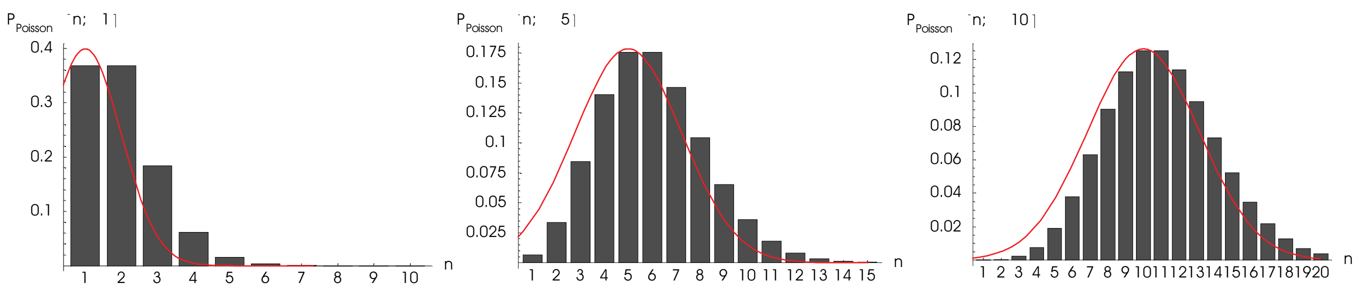
$$\overline{n} = N \cdot p \qquad \sigma^2 = N \cdot p \cdot (1-p)$$

2.7.3 Poisson-Verteilung

- **Definition:**

$$\mathbb{P}_{\text{Poisson}}(n;\overline{n}) = W(n) = \frac{\overline{n}^n}{n!} \cdot e^{-\overline{n}}$$

Die *Poisson-Verteilung* stellt den Grenzfall kleiner Wahrscheinlichkeiten $p \to 0$ und großer Grundgesamtheiten $N \to \infty$ der Binomialverteilung dar. Der Parameter $\overline{n}$ gibt den Mittelwert der Verteilung an.
$\mathbb{P}_{Poisson}(n;\overline{n})$ *gibt also die Wahrscheinlichkeit an, genau n sehr unwahrscheinliche Treffer bei in sehr vielen Versuchen zu erhalten* Die folgenden Grafiken zeigen die Poisson-Verteilung für die Parameter $\overline{n} = 1, 5, 10$ und jeweils die zugehörige Gauß-Verteilung, mit gleichem $\overline{n}$ und $\sigma = \sqrt{\overline{n}}$:



- **Varianz:**

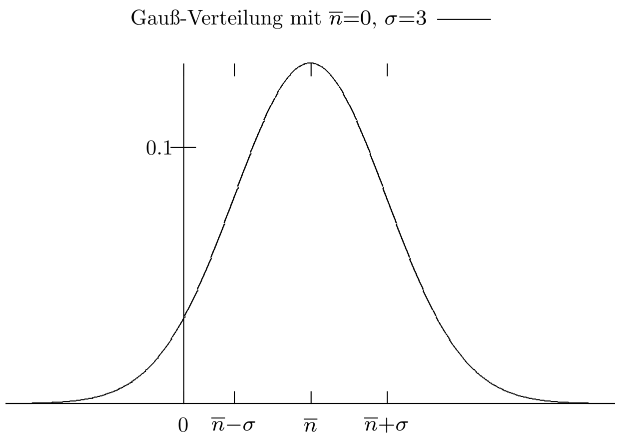
$$\sigma^2 = \overline{n}$$

2.7.4 Gauß-Verteilung:

- **Definition:** Für $n \to \infty$ geht dann die Poisson-Verteilung über in die Gauß-Verteilung:

$$w(n;\overline{n},\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \exp\left(-\frac{(n-\overline{n})^2}{2 \cdot \sigma^2}\right)$$

Der Faktor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}$ normiert die Verteilungsfunktion, sodass gilt: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} w(n)\cdot dn = 1$, d.h. das Experiment hat auf jeden Fall irgendein Ergebnis.



2.8 Statistische Tests

Statistische Tests sind Verfahren zur Prüfung von Hypothesen. Im Allgemeinen formuliert man zwei Hypothesen:

1. **Nullhypothese $\mathcal{H}_0$**
2. **Alternativhypothese $\mathcal{H}_A$ bzw. $\mathcal{A}$**

Beim Test eines Parameters ϑ (z.B. Mittelwert μ, Abweichung σ usw.) ist die Nullhypothese im Allgemeinen von der Form

$$\mathcal{H}_0 : \quad \{\vartheta = \vartheta_0\}.$$

Man mchte also überprüfen, ob der Parameter ϑ gleich einer vorgegebenen Größe ϑ_0 ist. Für die Alternativ-Hypothese gibt es dann im Allgemeinen zwei Möglichkeiten:

2.8.1 Signifikanztests

Ablaufschema eines Signifikanztests:

1. *Aufstellen der Nullhypothese $\mathcal{H}_0$ und der Alternativhypothese $\mathcal{H}_A$:*
   - einseitiger Test: $\mathcal{H}_A : \quad \{\vartheta > \vartheta_0\}$ oder $\mathcal{H}_A : \quad \{\vartheta < \vartheta_0\}$
   - zweiseitiger Test: $\mathcal{H}_A : \quad \{\vartheta \neq \vartheta_0\}$
2. *Festlegen der Irrtumswahrscheinlichkeit α:* Dies ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass wir die Nullhypothese verwerfen, obwohl sie gültig währe (Fehler 1.Art).
3. *Stichprobe/Testgröße T:* Nun nimmt man eine Stichprobe $X_1, ..., X_n$ vom Umfang n und berechnet daraus die Testgröße T.
4. *Überprüfen von T/Entscheidungsfindung:* Liegt T im kritischen Bereich, so wird $\mathcal{H}_0$ abgelehnt und $\mathcal{H}_A$ angenommen, ansonsten umgekehrt $\mathcal{H}_A$ verworfen und $\mathcal{H}_0$ angenommen. Dazu benutzt man eine vorher festgelegte Entscheidungsregel

Fehler beim Testen:

- **Fehler 1. Art:** Obwohl $\mathcal{H}_0$ zutrifft wird sie aufgrund der Stichprobe abgelehnt und $\mathcal{H}_A$ angenommen. Die Wahrscheinlichkeit hierfür heißt Irrtumswahrscheinlichkeit α
- **Fehler 2. Art:** Obwohl $\mathcal{H}_0$ falsch ist, wird sie aufgrund der STichprobe angenommen.

Kapitel 3

Stochastische Prozesse

3.1 Grundlagen

- **Definition:** Sei $\mathbf{X}$ eine stochastische Variable und t ein Parameter. So kann man mithilfe von $\mathbf{X}$ beliebige weitere stochastische Variablen definierten. Z.B.:

  $$\mathbf{X}_{\mathbf{X}}(t) := f(\mathbf{X}, t)$$

  Eine solche Variable $\mathbf{X}(t)$ bezeichnet man als *Stochastischen Prozess*, falls t die Zeit darstellt. Setzt man für $\mathbf{X}$ einen möglichen Wert x ein, so erhält man die sog. *Realisierung des Prozesses* oder *Sample-Funktion:*

  $$\mathbf{X}_x(t) = f(x, t).$$

- **Mittelwerte:**

  $$\langle \mathbf{X}(t) \rangle = \int \mathbf{X}_x(t) \cdot P_{\mathbf{X}}(x)\, dx$$

  oder allgemeiner für n Zeiten $t_1, ..., t_n$:

  $$\langle \mathbf{X}(t_1)\mathbf{X}(t_2)...\mathbf{X}(t_n) \rangle = \int \mathbf{X}_x(t_1) \cdot \mathbf{X}_x(t_2)...\mathbf{X}_x(t_2) \cdot P_{\mathbf{X}}(x)\, dx$$

- **Autokorrelationsfunktion:**

  $$\mathbb{K}(t_1, t_2) = \langle\langle \mathbf{X}(t_1)\mathbf{X}(t_2) \rangle\rangle = \langle \mathbf{X}(t_1)\mathbf{X}(t_2) \rangle - \langle \mathbf{X}(t_1) \rangle \langle \mathbf{X}(t_2) \rangle$$

  Für $t_1 = t_2 = t$ ergibt sich die zeitabhängige Varianz:

  $$\sigma^2(t) = \left\langle\left\langle \mathbf{X}^2(t) \right\rangle\right\rangle$$

Kapitel 4

Fehler-Rechnung

- **Fehlerfortpflanzungsgesetz:**

$$\Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right)^2 + \ldots} \qquad \text{mit} \quad z = f(x, y, \ldots)$$

- Fehlerformeln für einige einfach Funktionen (Voraussetzung: x, y sind nicht korellierte, fehlerbehaftete Größen):

Funktion	**absoluter Fehler**	**relativer Fehler**
$z = a \cdot x; \quad a = const$	$\Delta z = a \cdot \Delta x$	$\frac{\Delta z}{z} = \frac{\Delta x}{x}$
$z = x \pm y$	$\Delta z = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$	
$z = x \cdot y$	$\Delta z = \sqrt{(y \cdot \Delta x)^2 + (x \cdot \Delta y)^2}$	$\frac{\Delta z}{z} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2}$
$z = \frac{x}{y}$	$\Delta z = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{y}\right)^2 + \left(\frac{x}{y^2}\Delta y\right)}$	$\frac{\Delta z}{z} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2}$
$z = x^y$	$\Delta z = \sqrt{(\Delta x \cdot y \cdot x^{y-1})^2 + (\Delta y \cdot x^y \cdot \ln y)^2}$	
$z = e^x$	$\Delta z = \Delta x \cdot e^x$	
$z = \log_b(x); \quad b = const$	$\Delta z = \frac{\Delta x}{x \cdot \ln b}$	
$z = \ln x$	$\Delta z = \frac{\Delta x}{x}$	
$z = \sin x$	$\Delta z = \Delta x \cdot \cos x$	
$z = \cos x$	$\Delta z = \Delta x \cdot \sin x$	
$z = \tan x$	$\Delta z = \Delta x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$	
$z = \cot x$	$\Delta z = \Delta x \cdot \frac{1}{\sin^2 x}$	
$z = \sin^{-1} x$	$\Delta z = \frac{\Delta x}{\sqrt{1-x^2}}$	
$z = \cos^{-1} x$	$\Delta z = \frac{\Delta x}{\sqrt{1-x^2}}$	
$z = \tan^{-1} x$	$\Delta z = \frac{\Delta x}{1+x^2}$	
$z = \sinh x$	$\Delta z = \Delta x \cdot \cosh x$	
$z = \cosh x$	$\Delta z = \Delta x \cdot \sinh x$	
$z = \tanh x$	$\Delta z = \Delta x \cdot \frac{1}{\cosh^2 x}$	
$z = \text{arcsinh}\, x$	$\Delta z = \frac{\Delta x}{\sqrt{1+x^2}}$	
$z = \text{arccosh}\, x$	$\Delta z = \frac{\Delta x}{\sqrt{x^2-1}}$	
$z = \text{arctanh}\, x$	$\Delta z = \frac{\Delta x}{1-x^2}$	

Kapitel 5

Literatur

Quellen im Internet:

- `http://www.stat.uni-muenchen.de/~helmut/stat3/stat36.ps`
- *van Hees, Hendrik (2005):* **Statistische Physik.** 18.01.2005
(URL: `http://theory.gsi.de/~vanhees/faq/stat/index.html`)
- *Lemm, Jörg C. (2000):* **Econophysics WS1999/2000. Notizen zur Vorlesung über Optionen 2: Der klassische Ansatz nach Black-Scholes.** 18.01.2005
(URL: `http://pauli.uni-muenster.de/~lemm/econoWS99/options2/options2.html`)
- *Santen, Ludger / Rieger, Heiko (2003):* **Stochastische Prozesse in der statistischen Physik.** 18.01.2005
(URL: `http://www.uni-saarland.de/fak7/rieger/HOMEPAGE/LECTURES/SKRIPTEN/stochast.pdf`)